<36615197890010

Die

Elemente

der

Geometrie.

Erklärt

von

Dr. Georg Recht,

Lehrer der Mathematik an der Gewerbschule und Privatdocent an der Ludwig-Maximilians-Universität in München.

Mit sieben Steintafeln.

Zweite billige Schulausgabe.

München, 1853.

Verlag von E. A. Fleischmann.

Vorrede.

Seit einer Reihe von Jahren habe ich Unterricht in der Geometrie gegeben, und zwar nach verschiedenen Lehrbüchern, besonders nach Legendre. Das Vorliegende ist die Frucht dieses mehrjährigen Unterrichtes und meines Interesses an der Wissenschaft.

Obwohl die Anzahl der Lehrbücher über Geometrie nicht klein, so ist doch noch vieles in Bezug auf Methode und Anordnung des Stoffes zu thun, besonders da die geometrischen Wahrheiten auch dem Knabenalter zugänglich gemacht werden sollen, ohne daß an wissenschaftlicher Schärfe etwas aufgegeben wird, und dazu hofft der Verfasser etwas weniges beigetragen zu haben.

In Bezug auf Behandlung des Einzelnen sieht der Verfasser dem Einwurfe entgegen, daß er sich nicht gleich geblieben sey; allein dieß geschah absichtlich. Ungefähr in dem Grade, als der Lernende in Bezug auf selbstständige Darstellung und Auffassung allmählig freier und unabhängiger wird, ist auch bei Bearbeitung des Stoffes Freiheit und Ueberheben der Form eingetreten.

Daß in den Elementen der Geometrie von der Ellipse und der Parabel gesprochen wurde, bittet der Verfasser zu entschuldigen; es geschah nur, um Beispiele von krummen Linien zu geben, und für das weitere Studium der analytischen Geometrie anzuregen, so wie auch nur deßwegen auf die descriptive Geometrie hingedeutet wurde. Wer nicht Lust hat, dieses wenige von den Curven zu wissen, kann es ja überschlagen, oder ein anderes Buch gebrauchen, in welchem hievon keine Rede ist. Daß übrigens diese krummlinigen Flächen als Summen von Linien betrachtet wurden, geschah aus dankbarem Andenken an die Methode des Untheilbaren.

Die Näherungsformeln für die Berechnung der krummlinig begrenzten Flächen und der krummflächig begrenzten Körper wurden aufgenommen, um den praktischen Werth zu erhöhen, der so viel wie möglich ins Auge gefaßt wurde.

Mögen Sachverständige sowohl, als die, die diese Hilfe beim Erlernen der geometrischen Wahrheiten zu Grunde legen, von der guten Absicht des Verfassers überzeugt seyn.

München im August 1843.

Der Verfasser.

Inhalt.

Einleitung.

Erster Theil.

Ebene Geometrie.

Erstes Buch.

Die Prinzipien.

Zweites Buch.

Vom Kreise und dem Masse der Winkel.

Aufgaben

zum ersten und zweiten Buche.

Drittes Buch.

Von der Form, der Grösse und den Verhältnissen der Figuren.

Aufgaben

zum dritten Buche.

Viertes Buch.

Von den regulären Vielecken und dem Kreise.

Zweiter Theil.

Räumliche Geometrie.

Sechstes Buch.

Vom körperlichen Dreiecke.

Aufgaben

zum sechsten Buche.

Siebentes Buch.

Von den Polyedern.

Achtes Buch.

Von der Kugel.

Einleitung.

§ 1.

Alle Erscheinungen in Bezug auf Ausdehnung und Menge bezeichnen wir mit dem Namen Größen. Das wesentliche Merkmal einer jeden Größe ist daher die Fähigkeit der Vermehrung und Verminderung. Jene Größen, die sich in Bezug auf Ausdehnung wahrnehmen lassen, heißen stetig; diejenigen aber, die sich durch die Menge offenbaren, heißen discret. Theilt man eine ausgedehnte Größe in Theile, so ist das Ende des einen Theiles zugleich der Anfang des andern, die Theile hängen also zusammen, und die Größe heißt deßwegen stetig; discret heißt eine Größe, deren Theile an und für sich schon getrennt sind, und in dieser Hinsicht betrachtet werden. Viele Größen lassen sich in beiden Beziehungen betrachten. Begriff und Eintheilung der Größe.

Denkt man sich eine Größe in Bezug auf Ausdehnung oder Menge in mehrere gleiche Theile getheilt, so heißt ein solcher Theil Einheit, und ist selbst wieder eine Größe.

Die Einheit ist daher ein beliebiger aber constanter Theil einer Größe, und ist mit der Größe selbst immer gleichartig; daß sie constant sey, besteht darin, daß alle Einheiten einer Größe gleich sind, entweder in Bezug auf ihre Ausdehnung oder auf ihre Menge. Die Menge der Einheiten einer Größe nennt man ihren Inhalt.

Das Mittel, den Inhalt einer Größe auf bestimmte Weise zu denken, und zugleich in Wort und Sprache auszudrücken, nennen wir Zahl; jenes Mittel aber, den Inhalt einer Größe schriftlich darzustellen, nennen wir Zahlzeichen. Die Zahl sowohl, als das Zahlzeichen sind Mengen von Einheiten (Einsern), daher Größen, und zwar discrete.

Um den Inhalt einer Größe durch eine Zahl darzustellen, muß immer die Ordnung der Einheit durch eine Benennung oder ein anderes Zeichen dazu gesetzt werden, weßwegen solche Zahlen benannte Zahlen heißen, während die Zahlen oder Zahlzeichen selbst als Größen betrachtet absolute Zahlen genannt werden.

Die Operation, wodurch der Inhalt discreter Größen ermittelt wird, heißt zählen, bei stetigen Größen aber geht dem Zählen das Messen (Eintheilen in mehrere gleiche Theile) voraus. Zählen heißt daher die Menge der Einheiten einer discreten Größe aufsuchen.

Die stetigen Größen sind wieder zweierlei Art, entweder Größen des Raumes oder Größen der Zeit. Die unterscheidenden Merkmale dieser beiden Gattungen von Größen bestehen darin, daß erstere immer eine bestimmte Form haben, und an einem bestimmten Orte im Raume sich befinden; beide Gattungen von Größen aber haben unter sich und mit allen übrigen Größen gemein, daß sie sich durch Zahlen darstellen lassen.

§ 2.

Unter den räumlichen Größen selbst muß man wieder mehrere Arten von einander unterscheiden. Denkt man sich nemlich einen Theil des Raumes, so bezeichnet man diesen mit dem Namen **Körper**. Sehen wir blos auf das, was der Körper mit dem anstossenden Raume gemein hat, so erhalten wir die Grenze des Körpers, die wir mit dem Namen **Fläche** bezeichnen. Die Fläche ist eine räumliche Größe, denn sie hat alle dazu nöthigen Merkmale. Denken wir uns die Grenze eines Körpers zusammengesetzt aus mehreren Flächen, und sehen auf das, was diese Flächen mit einander gemein haben, so erhalten wir die **Linie**. Die Linie ist daher die Grenze einer Fläche, und besitzt alle Merkmale einer räumlichen Größe. Was nun Linien mit einander gemein haben, nennen wir **Punkt**. Der Punkt ist daher der gemeinschaftliche Ort zweier oder mehrerer Linien im Raume, ohne selbst eine räumliche Größe oder eine Größe überhaupt zu seyn, denn es fehlen ihm sowohl die Merkmale der Gattung, als der Art. Es gibt demnach drei Gattungen von räumlichen Größen: den Körper, die Fläche und die Linie.

Entstehung der räumlichen Größen.

Man kann auch auf umgekehrte Weise zur Kenntniß der räumlichen Größen gelangen, wie folgt:

Einen Ort im Raume ohne alle Ausdehnung bezeichnen wir mit dem Namen **Punkt**. Versetzt man einen Punkt im Raume, so heißt der stetige Weg **Linie**. Die Linie ist daher eine einfache Richtung im Raume, und zur Kenntniß derselben ist nur das Gesetz der Bewegung des erzeugenden Punktes zu kennen nothwendig. Bewegt sich eine Linie, so heißt der dadurch berührte Ort eine **Fläche**. Die Fläche ist eine zweifache Ausdehnung im Raume, und die Natur derselben hängt ab von der Natur der erzeugenden Linie (Generatrix) und dem Gesetze ihrer Bewegung. Bewegt sich endlich eine Fläche, so heißt der dadurch beschriebene Raum

Körper. Der Körper ist eine dreifache Richtung im Raume, und da er zugleich ein Theil des Raumes ist, so erhellt daraus, daß der Raum aus drei Richtungen besteht, die unendlich sind, und daß er daher ohne Form sey. Das Wesen eines Körpers hängt ab von der Natur der erzeugenden Fläche und dem Gesetze ihrer Bewegung.

§ 3.

Begriff und Eintheilung der Mathematik.

Die Lehre von den Größen überhaupt ist Mathematik. Sie hat die Eigenschaften der Größen als solcher und ihre Verbindungen zum Gegenstande. Die Mathematik zerfällt der Natur ihres Gegenstandes nach in zwei Haupttheile: in die Lehre von den diskreten Größen, und in die Lehre von den stetigen Größen.

Die Lehre von den diskreten Größen umfaßt hauptsächlich die Verbindungen der absoluten Zahlen, die entweder durch Zahlzeichen von gegebenen Werthen, oder durch ganz allgemeine Zahlzeichen dargestellt sind: im ersten Falle erhalten wir die gemeine Arithmetik, im zweiten Falle die allgemeine Arithmetik oder Buchstabenrechnung (mathematische Analysis). Die Lehre von den stetigen Größen zerfällt ebenfalls in zwei Theile: in die Lehre von den räumlichen Größen, und in die Lehre von den Raumgrößen in Verbindung mit der Zeit; denn die Zeit kommt nur vor bei einer Bewegung, und da nur räumliche Größen Resultat der Bewegung seyn können, so kommen diese beiden Gattungen von Größen in ihrer Verbindung vor. Die Lehre von den räumlichen Größen heißt Geometrie, die Lehre von den räumlichen Größen aber mit Rücksicht auf die Zeit ihrer Entstehung durch äußere Ursachen nennen wir Mechanik. Die mathematische Analysis ist der allgemeinste Theil der Mathematik, und faßt nicht blos die Arithmetik, sondern auch Geometrie und Mechanik gleichsam als An-

wendungen in sich, da alle räumlichen Größen und Zeitgrößen sich durch discrete Größen oder Zahlen darstellen lassen.

§ 4.

1. Den Inhalt einer jeden Größe bezeichnen wir mit einem Buchstaben aus dem lateinischen Alphabete. Wort- und Sach-Erklärungen.

2. Das Zeichen = ist das Zeichen der Gleichheit, z. B. A = B. Um anzuzeigen, daß A kleiner ist als B, schreibt man A < B; ist A größer als B, so schreibt man A > B. Das Zeichen + heißt plus und bedeutet die Addition; das Zeichen — heißt minus und bedeutet, daß die nachfolgende Zahl von der vorausgehenden abzuziehen sey. Der Ausdruck A + B heißt Summe, die beiden Glieder Summanden; A — B heißt Differenz, das erste Glied Minuend, das zweite Subtrahend, und man sieht leicht ein, daß der Minuend allein ebenso groß ist, als die Differenz und der Subtrahend mit einander. Ein Ausdruck von mehreren Gliedern, durch Addition und Subtraktion mit einander verbunden, heißt Aggregat, z. B. A — B + C, d. h. es soll von A das B abgezogen und das C addirt werden. Das Zeichen (....) bedeutet, daß alle Größen innerhalb der Klammern zu einer einzigen Größe zusammengehören. Durch Zahlenbeispiele kann man sich leicht überzeugen, daß

$A + (B - C - D + E) = A + B - C - D + E$ u.

$A - (B - C - D + E) = A - B + C + D - E.$

Das Zeichen × oder . bedeutet die Multiplikation; auch setzt man bei Buchstabengrößen öfters gar kein Zeichen dazwischen, z. B. $A \times B = A . B = AB$; diese Zahl heißt Produkt, die beiden Zahlen aber Faktorn. Der Ausdruck $A : B$ oder $\frac{A}{B}$ bedeutet, daß A durch B dividirt werden soll, und heißt Quotient, A heißt der Dividend, und B der Divisor.

Steht ein und dieselbe Zahl öfters als Faktor in einem Produkte, so schreibt man sie nur einmal, und oben rechts die Zahl, wie oft der Faktor zu setzen ist, z. B. $A \cdot A \cdot A = A^3$, und man liest A zur dritten oder A Kubus; A zur zweiten schreibt man A^2, und liest auch A Quadrat; der Ausdruck selbst heißt Potenz. Das Zeichen $\sqrt{}$ bedeutet eine Wurzel aus dem Ausdrucke, über welchen es sich erstreckt. Unter Wurzel versteht man aber nichts anderes als jene Zahl, die man erhält, wenn man eine Zahl in eine gegebene Anzahl gleicher Faktorn zerlegt, und einen solchen Faktor nimmt; z. B. $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{4.4.4} = 4$.

Die Zahl $\frac{A + B + C}{3}$ heißt das arithmetische Mittel der drei Zahlen A, B und C; die Zahl $\sqrt{A \cdot B}$ heißt das geometrische Mittel aus den beiden Zahlen A u. B.

3. Satz ist die Benennung einer jeden Behauptung.

Grundsatz ist ein durch die Natur der Sache jedem denkenden Geiste klarer Satz.

Lehrsatz ist ein Satz, dessen Wahrheit aus der Wahrheit anderer Sätze als nothwendig erkannt werden kann.

Aufgabe ist eine Frage, die erst durch eine in der Frage liegende Operation (Auflösung) zum Satze wird.

Zusatz ist ein Satz, dessen Wahrheit aus der Wahrheit eines oder mehrerer Sätze von selbst folgt.

4. Beweis heißt die logische oder naturgemäße Zusammenstellung bekannter oder vorausgesetzter Sätze, woraus die Wahrheit oder Falschheit der aufgestellten Behauptung hervorgeht. Der Lehrsatz bedarf daher des Beweises, ebenso das Resultat einer Aufgabe, deren Wahrheit nicht als Zusatz erscheint: indessen kann man auch bei Zusätzen den Zusammenhang des Grundes und der Folge durch den Beweis erläutern.

Der Beweis ist seiner Natur nach doppelt, entweder **direkt** oder **indirekt**. Direkt heißt der Beweis, wenn die behauptete Wahrheit als Folge eines wahren Grundes erscheint; indirekt heißt der Beweis, wenn die Unzulässigkeit jeder andern Möglichkeit dargethan wird, indem man von der Falschheit der Folge auf die Faschheit des Grundes schließt; kann z. B. gezeigt werden, daß A nicht größer und nicht kleiner als B seyn kann, so folgt, daß A gleich B ist.

Lehnsatz heißt jeder Satz, der zu einem Beweise oder zur Lösung einer Aufgabe zu Hilfe genommen wird.

Hypothese (willkührlicher Satz) heißt ein Satz, den man zum Beweise eines andern Satzes voraussetzt, und dessen Giltigkeit so lange anerkannt werden darf, so lange nicht eine falsche Folge daraus entsteht.

Definition ist die Entwicklung eines Begriffes nach seinem Gattungs- und seinem Art-Merkmale.

Erklärung ist die weitere Entwicklung eines Begriffes oder einer Sache nach mehreren Merkmalen.

Anmerkung heißt dasjenige, was zu einem oder mehreren Sätzen hinzugefügt wird, um ihren Zusammenhang, ihren Nutzen, ihre Beschränkung oder ihre Ausdehnung zu erläutern.

§ 5.

1) Das Ganze ist seinen Theilen zusammengenommen gleich. Grundsätze.
2) Das Ganze ist größer als ein oder mehrere Theile desselben.
3) Zwei Größen, die einer dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich.
4) Was größer ist als die größere von zwei ungleichen Größen, ist auch größer als die andere (kleinere).
5) Zwei räumliche Größen, die bei gehöriger Lage voll-

kommen in einander paßen, sind gleich in Bezug auf ihren Inhalt und in Bezug auf ihre Form, d. h. congruent.

Anmerkung. Die übrigen nöthigen Erklärungen, Grundsätze, u. s. w. werden am gehörigen Orte selbst vorkommen.

§ 6.

Punkt.

Definition. Der Punkt ist ein Ort im Raume ohne Ausdehnung d. h. ohne Inhalt und Form.

Anmerkung. Das kleinste Zeichen, welches man mit einer Spitze machen kann, ist das Bild eines Punktes. Um einen Punkt in Schrift und Sprache zu bezeichnen, und mehrere solche Punkte von einander zu unterscheiden, setzt man zu obigem Bilde einen Buchstaben aus dem großen lateinischen Alphabete So z. B. heißt das Zeichen in Fig. 1: der Punkt A. Dieser Buchstabe bedeutet aber keine Zahl, sondern blos einen Namen.

§ 7.

Von der geraden Linie überhaupt.

Erklärungen. Ein Punkt kann sich auf sehr verschiedenen Wegen von einem Orte im Raume an einen andern bewegen. Diese Wege können in Hinsicht auf Inhalt, Form und Lage verschieden seyn, obwohl mehrere unter ihnen in Hinsicht auf Inhalt und Form einander gleich seyn können. Derjenige Weg nun, der an Inhalt der kleinste ist, bezeichnet die gerade Linie, und gibt deßwegen die kürzeste Entfernung oder blos die Entfernung der beiden Punkte von einander an.

Definition. Die gerade Linie ist die Richtung der kürzesten Entfernung zweier ihrer Punkte.

Erster Satz. Grundsatz.

Durch zwei Punkte ist nur eine einzige gerade Linie möglich; oder:

Die Lage einer geraden Linie ist durch die Lage zweier beliebiger Punkte in ihr bestimmt; oder:

Wenn zwei gerade Linien zwei Punkte mit einander gemein haben, so fallen sie ihrer ganzen Richtung nach ins Unendliche fortgesetzt auf einander.

Anmerkung. Ein an zwei Punkten befestigter, gespannter (kürzester) Faden ist ein Bild der Geraden. Die Richtung eines festen Körpers, die mit einem gespannten Faden zusammentrifft, ist eine gerade Linie, und der Körper heißt geradliniges Lineal oder blos Lineal. Ein Strich auf dem Papiere, der mit der genannten Richtung zusammenfällt, ist ebenfalls ein Bild der Geraden. Um eine Gerade in Schrift und Sprache zu bezeichnen, und verschiedene Gerade von einander zu unterscheiden, setzt man zum genannten Bilde zwei Buchstaben aus dem großen lateinischen Alphabete. So z. B. heißt das Zeichen in Fig. 2: die Gerade AB. Allein weder A noch B noch AB bedeuten Zahlen, sondern das letzte gibt den Namen für die Gerade; sind aber A und B ihre Endpunkte, so bezeichnet AB auch zugleich den Inhalt oder die Größe der Geraden, die man gewöhnlich durch einen kleinen Buchstaben ausdrückt, so daß AB = a ist.

I. Zusatz. Die Theile einer geraden Linie sind ebenfalls gerade.

Bew. Denn es sey in Fig. 3 AB eine Gerade, und CD ein Theil; wäre nun CD keine Gerade, so wäre es z. B. CED, alsdann wäre CED < CD und AB wäre nicht der kürzeste Weg, was gegen die Natur der Geraden, daher unmöglich ist, also ist auch unmöglich, daß CD nicht gerade ist, d. h. CD ist eine Gerade. w. z. b. w.

II. Zusatz. Zwei gerade Linien können sich nur in einem Punkte schneiden.

Bew. Denn schnitten sie sich in zwei oder mehreren Punkten, und wären verschiedene Linien, so gäbe es durch zwei Punkte zwei verschiedene Gerade, was gegen obigen Grundsatz, daher unmöglich ist, also ist auch unmöglich, daß sich zwei Gerade in zwei Punkten schneiden, d. h. zwei Gerade können sich nur in einem einzigen Punkte schneiden. w. z. b. w.

III. Zusatz. Zwei gleich lange gerade Linien sind congruent. *)

Fig. 4. Dat. AB = CD
Thes. AB ≌ CD

Bew. Wenn man C auf A, und ausserdem noch einen Punkt von CD auf einen Punkt von AB fallen läßt, d. h. CD in die Richtung von AB legt, so muß D auf B fallen; denn fiele D innerhalb B, z. B. nach E, so wäre

AE = CD (dieselbe Linie);

es ist aber AB = CD (Dat.)

---

daher wäre AB = AE was gegen einen obiger Grundsätze, daher unmöglich ist, also ist auch unmöglich, daß D innerhalb B niederfalle. Ebenso kann bewiesen werden, daß D nicht über B hinaus, z. B. nach F fallen kann.

Da nun D nicht innerhalb und nicht ausserhalb B fallen kann, so muß D auf B fallen, und es ist:

AB ≌ CD. w. z. b. w.

§ 8.

Von der Ebene.

Erklärung. Bewegt sich eine Linie, so entsteht eine Fläche, das Wesen der Fläche hängt daher von der Natur der erzeugenden Linie und dem Gesetze der Bewegung ab. Es sey nun die Erzeugende eine Gerade, die an zwei sich schneidenden Geraden fortgeht, so sieht man leicht ein, daß eine bestimmte Fläche entsteht, da die Lage der Erzeugenden durch zwei Punkte der leitenden Linien bestimmt ist. Ebenso sieht man leicht ein, daß diese Fläche in jeder beliebigen Richtung gleichsam aus lauter Geraden besteht, und wir nennen diese Fläche eine Ebene.

Definition. Die Ebene ist eine Fläche von der Art, daß die geradlinige Verbindung zweier beliebiger ihrer Punkte ganz in ihr liegt.

---

*) Das Zeichen der Congruenz ist ≌ oder ≂ oder ≂.

Zweiter Satz. Lehrsatz.

Die Lage einer Ebene ist durch die Lage dreier ihrer Punkte bestimmt; oder:

Durch drei Punkte ist nur eine einzige Ebene möglich; oder

Wenn zwei Ebenen drei Punkte, die nicht in einer geraden Linie liegen, gemein haben, so fallen sie ganz ineinander.

Bew. Wären durch die drei Punkte A, B und C in Fig. 5 zwei verschiedene Ebenen möglich, so gäbe es durch irgend zwei Punkte dieser Ebenen wie D und E, die nach obiger Definition in beiden Ebenen lägen, zwei Gerade, was gegen obigen Grundsatz daher unmöglich ist, also ist auch unmöglich, daß man durch drei Punkte zwei Ebenen legen kann, d. h. durch drei Punkte ist nur eine einzige Ebene möglich. w. z. b. w.

Zusatz. Zwei Ebenen können sich nur in einer geraden Linie schneiden.

Bew. Denn schnitten sie sich in drei Punkten, die in einer krummen Linie liegen, so gäbe es durch drei Punkte zwei Ebenen, was gegen obigen Lehrsatz, daher unmöglich ist, also ist auch unmöglich, daß sich zwei Ebenen in einer krummen Linie schneiden, d. h. zwei Ebenen schneiden sich in einer Geraden. w. z. b. w.

§ 9.

Als natürliche Eintheilung der Geometrie erscheint die nach der Natur der räumlichen Größen, nemlich in die Lehre von den Linien, in die Lehre von den Flächen, und in die Lehre von den Körpern, oder in Longimetrie, Planimetrie und Stereometrie. Allein diese Eintheilung ist zum Vortrage nicht geeignet, da die einzelnen Lehren nicht leicht besonders behan-

Eintheilung der Geometrie.

delt werden können. Eine andere Eintheilung bietet uns die Ebene dar.

Es ist nemlich eine große Erleichterung für den Vortrag und das Verständniß der geometrischen Wahrheiten, von dem, was in der Behauptung vorkommt, ein deutliches Bild durch Zeichnung zu entwerfen; da sich aber zum Zeichnen nur Ebenen darbieten, so theilen wir die Größen selbst und ihre Verbindungen in solche ein, die entweder in einer einzigen Ebene liegend gedacht werden können, von denen man also auch durch eine einfache Zeichnung auf dem Papiere ein deutliches Bild entwerfen kann, und in solche, die im Raume zerstreut liegen, und von denen man gleichsam nur den Schatten zeichnen kann, den sie auf eine Ebene werfen. Jedenfalls kann man aber letztere in einer Verbindung von Ebenen liegend denken, wodurch alle Wahrheiten des zweiten Theiles auf die des ersten zurückgeführt werden. Der erste Theil hat den Namen e b e n e G e o m e t r i e, der zweite den Namen r ä u m l i c h e G e o m e t r i e. Diese Eintheilung wollen wir auch in unserm Vortrage beibehalten.

Ebene Geometrie.

Erster Theil.

Erstes Buch.

Die Prinzipien.

§ 10.

Definition. Die Neigung zweier sich schneidenden geraden Linien nennt man Winkel. Vom Winkel.

Erklärung. Wenn man eine Gerade in einem Punkte befestigt denkt, so kann man sie, beständig in einer Ebene bleibend, beliebig um diesen Punkt drehen. Dasjenige nun, wodurch sich die verschiedenen Stellungen dieser Geraden von einander unterscheiden, nennt man ihre Neigungen oder ihre Winkel. Da diese Neigungen auf obige Weise vergrößert oder verkleinert werden können, so ist der Winkel eine Größe, und alle Winkel lassen sich in Bezug auf einen als Einheit angenommenen constanten Winkel durch Zahlen ausdrücken. Die beiden Geraden heißen die Schenkel des Winkels, der Durchschnitts-Punkt heißt der Scheitel desselben. Zugleich sieht man, daß die Länge der Schenkel auf die Größe des Winkels keinen Einfluß hat. Um einen Winkel in Schrift

und Sprache auszudrücken, und mehrere solche von einander zu unterscheiden, gebraucht man gewöhnlich drei Buchstaben, von denen beim Lesen und Schreiben der Scheitelbuchstabe in die Mitte gesetzt wird. Diesen Buchstaben wird gewöhnlich das Zeichen $\angle$, welches Winkel heißt, vorgesetzt. So z. B. heißt das Zeichen in Fig. 6: $\angle$ ABC, oder Winkel ABC. Die Zusammensetzung dieser drei Buchstaben bezeichnet den Namen des Winkels und zugleich die Größe desselben für eine festgesetzte Einheit. Oefters drückt man den Winkel blos durch den Scheitelbuchstaben aus, oder gebraucht nur einen einzigen Buchstaben, den man nahe am Scheitel zwischen die beiden Schenkel setzt; hie und da bezeichnet man auch die beiden Schenkel mit eigenen einzelnen Buchstaben, die man in Klammern nebeneinander setzt, um den Winkel auszudrücken. So z. B. heißt das Bild in Fig. 6:

$$\angle ABC = \angle B = \angle a = \angle (l_1\ l_2).$$

Zusatz. Zwei gleich große Winkel sind congruent

Fig. 7. Dat. $\angle ABC = \angle DEF$.
Thes. $\angle ABC \cong \angle DEF$.

Bew. Wenn man E auf B und EF in die Richtung von BC legt, so muß ED in die Richtung von BA fallen; denn fiele ED innerhalb BA, z. B. nach BG, so wäre

$$\angle GBC = \angle DEF;$$

es ist aber $\angle ABC = \angle DEF$,

daher wäre $\angle ABC = \angle GBC$, was gegen einen obiger Grundsätze, daher unmöglich ist, also ist auch unmöglich, daß ED innerhalb BA fällt. Ebenso wird dann gezeigt, daß ED nicht außerhalb BA fallen kann.

Da nun ED weder innerhalb noch außerhalb BA fallen kann, so muß ED auf BA fallen, und es ist:

$$\angle ABC = \angle DEF. \text{ w. z. b. w.}$$

§. 11.

Definition. Neigt sich eine Gerade zu einer andern Geraden nicht mehr und nicht weniger als zu deren Verlängerung, so ist der Winkel dieser beiden Geraden ein rechter. Vom rechten Winkel.

Anmerkung. Als Einheit, um die Größe der Winkel auszudrücken, gebraucht man gewöhnlich den rechten Winkel, den man mit R bezeichnet.

Erster Satz. Lehrsatz.

Alle rechten Winkel sind einander gleich.

Fig. 8. Dat. $\begin{cases} \angle ABC = \angle GBC, \\ \angle DEF = \angle HEF; \end{cases}$

Thes. $\angle ABC = \angle DEF$.

Bew. Legt man den Punkt E auf B und ED in die Richtung von BA, so muß EH in die Richtung von BG fallen (weil durch zwei Punkte eine Gerade bestimmt ist), ferner muß EF in die Richtung von BC fallen; denn fiele EF nicht auf BC, sondern z. B. rechts von BC nach BL, so wäre

$\angle LBA = \angle FED$ und

$\angle LBG = \angle FEH$, daher gemäß Dat.

$\angle LBA = \angle LBG$, was unmöglich ist,

da $\angle LBA > \angle CBA$ und daher $> CBG$

$\angle LBG < \angle CBG$,

also ist auch unmöglich, daß EF rechts von BC fallen kann. Ebenso wird bewiesen, daß EF auch nicht links von BC fallen kann.

Da nun EF weder rechts noch links von BC fallen kann, so muß EF auf BC selbst fallen, und es ist daher

$\angle ABC = \angle DEF$. w. z. bew. w.

Anmerkung. Dieser Satz sammt Beweis ist nothwendig, um überzeugt zu seyn, daß die oben erklärte Maßeinheit constant sey.

Zusatz. Wenn zwei Winkel einander gleich sind, und es ist einer ein rechter, so ist der andere ebenfalls ein rechter (dritter Grundsatz).

§. 12.

Größe der Winkel, wenn sich zwei od. mehrere Gerade in einem einzig. Punkte schneiden.

Erklärung. Begegnet eine Gerade einer andern Geraden, so entstehen zwei aneinanderstossende Winkel, von denen der eine im Allgemeinen größer, der andere kleiner ist als ein rechter. Jeder Winkel, der kleiner ist als ein rechter, heißt spitz; jeder, der größer ist als ein rechter, heißt stumpf. Durchkreuzen sich die Linien, so entstehen vier Winkel, in denen für je zwei gegenüberliegende die vier Schenkel in zwei Geraden liegen.

Definitionen. 1) Zwei aneinanderstossende Winkel, deren äußere Schenkel in einer geraden Linie liegen, heißen Nebenwinkel.

2) Zwei Winkel, in denen die Schenkel des einen Winkels die Verlängerungen der Schenkel des andern sind, heißen Scheitelwinkel.

Zweiter Satz. Lehrsatz.

Zwei Nebenwinkel sind zusammen gleich zwei rechten.

Fig. 9. Dat. { ABD eine gerade Linie, BC gemeinschaftlich;

Thes. $\angle ABC + \angle DBC = 2R$.

Bew. Man denke sich BE so gezogen, daß es mit ABD rechte Winkel macht (ABD eine Gerade), so ist:

$$\begin{array}{l}\angle ABC = \angle ABE + \angle EBC \text{ und} \\ \angle DBC = \angle DBE + \angle CBE \\ \hline \end{array}$$

$\angle ABC + \angle DBC = \angle ABE + DBE$; nun ist aber $\angle ABE + \angle DBE = 2R$, daher auch $\angle ABC + \angle DBC = 2R$. w. z. b. w.

I. Zusatz. Wenn zwei aneinander liegende Winkel zusammen gleich zwei rechten sind, so liegen die beiden äußern Schenkel in einer Geraden.

Fig. 10. Dat. $\angle ABC + \angle DBC = 2R$;
Thes. ABD eine einzige Gerade.

Bew. Wäre ABD keine Gerade, d. h. wäre BD nicht die Verlängerung von AB, so wäre eine andere Linie z. B. BF die Verlängerung von AB, und deßhalb ABF eine Gerade, daher:

$\angle ABC + \angle CBF = 2R$ (voriger Satz), es ist aber $\angle ABC + \angle CBD = 2R$ (Dat.),

daher $\angle ABC + \angle CBF = \angle ABC + \angle CBD$,

also wäre auch $\angle CBF = \angle CBD$, was unmöglich ist, da $\angle CBD$ ein Theil von $\angle CBF$ ist, daher ist auch unmöglich, daß die Verlängerung von AB unter BD liegt. Ebenso kann bewiesen werden, daß dieselbe auch nicht oberhalb BD liegen kann.

Da die Verlängerung von AB weder unter- noch oberhalb BD seyn kann, so ist BD selbst die Verlängerung von AB, d. h. ABD eine einzige Gerade. w. z. b. w.

II. Zusatz. Zwei Scheitelwinkel sind einander gleich.

Fig. 11. Dat. $\begin{cases}\angle ABC + \angle DBC = 2R, \\ \angle EBD + \angle CBD = 2R;\end{cases}$
Thes. $\angle ABC = \angle EBD$.

Bew. Es ist

$$\left.\begin{array}{r}\angle ABC + \angle DBC = 2R \\ \text{u. } \angle EBD + \angle DBC = 2R\end{array}\right\} \text{Dat.}$$

daher $\angle ABC + \angle DBC = \angle EBD + \angle DBC$

$\angle ABC = \angle DBC$. w. z. b. w.

III. Zusatz. Mehrere aneinanderstoßende Winkel, deren äußere Schenkel eine gerade Linie bilden, sind zusammen gleich zwei rechten.

Fig. 12. Dat. ABE eine einzige Gerade;

Thes. $\angle ABC + \angle CBD + \angle DBE = 2R$.

Bew. Es ist $\angle ABC + \angle CBD = \angle ABD$ und

$\angle EBD = \angle DBE$

$\angle ABC + \angle CBD + \angle DBE = \angle ABD + \angle DBE$;

nun ist aber $\angle ABD + \angle DBE = 2R$ (Satz 2).

$\angle ABC + \angle CBD + \angle DBE = 2R$. w. z. bew. w.

IV. Zusatz. Wenn mehrere aneinanderstossende Winkel zusammen gleich zwei rechten sind, so liegen die beiden äußern Schenkel in einer einzigen geraden Linie.

Fig. 13. Dat. $\angle ABC + \angle CBD + \angle DBE = 2R$;

Thes. ABE eine einzige Gerade.

Bew. Siehe Zusatz I. zum Satze 2.

Zusatz V. Alle Winkel um einen Punkt herum sind zusammen gleich vier rechten.

Fig. 14. Thes. $\angle ABC + \angle CBD + \angle DBE + \angle EBA = 4R$.

Bew. Verlängert man AB, so ist:

$\angle x + \angle y + \angle z = 2R$,

ferner ist $\angle u + \angle v = 2R$

$\angle x + \angle y + \angle z + \angle v + \angle u = 4R$. w. z. bew. w.

§. 13.

Erklärung. Die vorausgehenden Sätze bezogen sich auf zwei sich schneidende Linien; in den nachfolgenden Sätzen wollen wir nun die Gesetze der Winkel aufsuchen, wenn zwei Linien von einer dritten durchschnitten werden. Bei diesen Untersuchungen kann man entweder auf zwei oder auf alle drei Durchschnitte Rücksicht nehmen; nimmt man nur auf zwei Durchschnitte Rücksicht, so nennt man in Fig. 15 die Winkel:

Winkelgesetze, wenn sich drei Gerade schneiden und zwar in Bezug auf zwei Durchschnitte.

f und d e „ c	innere entgegengesetzte;
a und h b „ g	äußere entgegengesetzte;
a und f b „ e h „ d g „ c	innere und äußere entgegengesetzte oder correspondirende Winkel;
c und f d „ e	innere Wechselwinkel;
b und h a „ g	äußere Wechselwinkel;
b und f a „ e c „ h d „ g	innere und äußere Wechselwinkel.

Diese Winkel hängen nun durch folgende Gesetze mit einander zusammen.

Dritter Satz. Lehrsatz.

Wenn ein Paar entgegengesetzte Winkel gleich zwei rechten sind, so sind:

1) jedes Paar entgegengesetzte Winkel gleich zwei rechten;
2) jedes Paar Wechselwinkel einander gleich;

3) jedes Paar correspondirende Winkel gleich;
4) jedes Paar innere und äussere Wechselwinkel gleich zwei rechten.

Dat. $\angle d + \angle f = 2 R$;

Fig. 16. a. Thes. $\begin{cases} 1) \angle b + \angle g = 2 R, \\ 2) \angle c = \angle f, \\ 3) \angle a = \angle f, \\ 4) \angle b + \angle f = 2 R. \end{cases}$

Bew. 1. Es ist $\angle d + \angle f = 2 R$ (Dat.)
$\angle b = \angle d$
u. $\angle g = \angle f$ } (Scheitelw.)

daher ist $\angle b + \angle g = 2 R$. w. zu bew. w.

2. Ferner ist $\angle d + \angle f = 2 R$ (Dat.)
u. $\angle c + \angle d = 2 R$ (Nebenwinkel)

daher $\angle d + \angle f = \angle c + \angle d$
und $\angle f = \angle c$. w. z. bew. w.

3. Ferner ist $\angle d + \angle f = 2 R$ (Dat.)
u. $\angle d + \angle a = 2 R$ (Nebenwinkel)

daraus folgt $\angle d + \angle f = \angle d + \angle a$
daher $\angle f = \angle a$. w. zu bew. w.

4. Endlich ist $\angle d + \angle f = 2 R$ (Dat.)
u. $\angle d = \angle b$ (Scheitelw.)

daher $\angle b + \angle f = 2 R$. w. zu bew. w.

Vierter Satz. Lehrsatz.

Wenn ein Paar Wechselwinkel einander gleich sind, so sind

1) jedes Paar Wechselwinkel einander gleich;
2) jedes Paar correspondirende Winkel einander gleich;

3) jedes Paar innere und äußere Wechselwinkel gleich zwei rechten;

4) jedes Paar entgegengesetzte gleich zwei rechten.

Dat. $\angle c = \angle f$.

Fig. 16. b.

Thes. $\begin{cases} 1) \angle a = \angle g \\ 2) \angle c = \angle g \\ 3) \angle d + \angle g = 2R \\ 4) \angle d + \angle f = 2R. \end{cases}$

Bew. 1) Es ist $\angle c = \angle f$ (Dat.)

$\left.\begin{array}{l} \angle c = \angle a \\ \angle f = \angle g \end{array}\right\}$ (Scheitelwinkel)

daraus folgt $\angle f = \angle a$;

es ist aber $\angle f = \angle g$

daher $\angle a = \angle g$. w. z. bew. w.

2) Ferner ist $\angle c = \angle f$ (Dat.)

$\angle f = \angle g$ (Scheitelwinkel)

$\angle c = \angle g$. w. z. bew. w.

3) Ferner ist $\angle c = \angle f$ (Dat.)

$\angle f = \angle g$ (Scheitelwinkel)

und $\angle c + \angle d = 2R$ (Nebenwinkel)

daraus folgt $\angle c = \angle g$;

es ist aber $\angle c + \angle d = 2R$

daher $\angle d + \angle g = 2R$. w. z. bew. w.

4) Endlich ist $\angle c = \angle f$ (Dat.)

und $\angle d + \angle c = 2R$

daher $\angle d + \angle f = 2R$. w. z. bew. w.

Fünfter Satz. Lehrsatz.

Wenn ein Paar correspondirende Winkel einander gleich sind, so sind:

1) jedes Paar correspondirende Winkel einander gleich;
2) jedes Paar innere und äußere Wechselwinkel gleich zwei rechten;
3) jedes Paar entgegengesetzte Winkel gleich zwei rechten;
4) jedes Paar Wechselwinkel einander gleich.

Dat. $\angle a = \angle f$.

Fig. 16. c. Thes. $\begin{cases} 1) \angle c = \angle g \\ 2) \angle b + \angle f = 2R \\ 3) \angle d + \angle f = 2R \\ 4) \angle c = \angle f. \end{cases}$

Bew. 1) Es ist $\angle a = \angle f$ (Dat.)

$\left.\begin{array}{l} \angle c = \angle a \\ \angle f = \angle g \end{array}\right\}$ (Scheitelwinkel)

daraus folgt $\angle c = \angle f$;
es ist aber $\angle f = \angle g$

daher ist $\angle c = \angle g$. w. z. bew. w.

2) Ferner ist $\angle a = \angle f$ (Dat.)
und $\angle b + \angle a = 2R$ (Nebenwinkel)

daher $\angle b + \angle f = 2R$. w. z. bew. w.

3) Ferners ist $\angle a = \angle f$ (Dat.)
und $\angle d + \angle a = 2R$ (Nebenwinkel)

daher $\angle d + \angle f = 2R$. w. z. bew. w.

4) Endlich ist $\angle a = \angle f$ (Dat.)
und $\angle c = \angle a$ (Scheitelwinkel)

daher $\angle c = \angle f$. w. z. bew. w.

Sechster Satz. Lehrsatz.

Wenn ein Paar innere und äußere Wechselwinkel gleich zwei rechten sind, so sind:

1) jedes Paar innere und äußere Wechselwinkel gleich zwei rechten;
2) jedes Paar entgegengesetzte Winkel gleich zwei rechten;
3) jedes Paar Wechselwinkel einander gleich;
4) jedes Paar correspondirende Winkel einander gleich.

Dat. $\angle b + \angle f = 2R.$

Fig. 16. d.
Thes.
1) $\angle d + \angle g = 2R$
2) $\angle d + \angle f = 2R$
3) $\angle c = \angle f$
4) $\angle a = \angle f$

Bew. 1) Es ist $\angle b + \angle f = 2R$ (Dat.)
$\angle b = \angle d$
und $\angle f = \angle g$ (Scheitelw.)

daraus folgt $\angle f + \angle d = 2R$
es ist aber $\angle g = \angle f$

daher ist $\angle g + \angle d = 2R$. w. z. bew. w.

2) Ferner ist $\angle b + \angle f = 2R$ (Dat.)
und $\angle d = \angle b$ (Scheitelw.)

daher $\angle d + \angle f = 2R$ w. z. bew. w.

3) Ferner ist $\angle b + \angle f = 2R$ (Dat.)
und $\angle b + \angle c = 2R$ (Nebenwinkel)

daraus folgt $\angle b + \angle f = \angle b + \angle c$
daher $\angle f = \angle c$. w. z. bew. w.

4) Endlich ist $\angle b + \angle f = 2R$ (Dat.)
und $\angle b + \angle a = 2R$ (Nebenwinkel)

daraus folgt $\angle b + \angle f = \angle b + \angle a$
daher ist $\angle f = \angle a$. w. z. bew. w.

Anmerkung. Ueberhaupt kann man, wenn zwei Gerade von

einer dritten geschnitten werden, und man nur auf zwei Durchschnitte sieht, aus einem Gesetze eines Winkelpaares das entsprechende Gesetz jedes andern Winkelpaares auf obige Weise finden.

§. 14.

Das Dreieck in Bezug auf seine Seite.

Erklärung. Aus dem Satze: zwei Gerade können sich nur in einem Punkte schneiden, sieht man leicht ein, daß zwei Gerade keine Ebene begrenzen, ferner daß drei Gerade sich im Allgemeinen in drei Punkten schneiden, daher eine Ebene begrenzen, die Dreieck heißt. Jede begrenzte Ebene heißt Figur; das Dreieck ist daher die einfachste Figur. Die drei begrenzten Geraden heißen die Seiten, ihre Durchschnitte die Ecken und ihre Neigungen die Winkel des Dreieckes. Nimmt man eine von den Seiten als Grundlinie (Basis) an, so heißt das gegenüberliegende Eck die Spitze des Dreieckes. Eintheilen kann man die Dreiecke nach den Seiten in drei Gattungen: 1) in ungleichseitige, in denen alle drei Seiten verschieden sind; 2) gleichschenklige, in denen zwei Seiten einander gleich sind, dabei wird gewöhnlich die dritte Seite als Grundlinie angenommen; 3) in gleichseitige, in denen alle drei Seiten einander gleich sind. Hat eine Figur mehr Seiten als drei, so sieht man leicht ein, daß sie eben so viel Ecken oder Winkel haben muß, als sie Seiten hat. Hat eine Figur vier Seiten, so heißt sie Viereck, bei fünf Seiten Fünfeck, u. s. f. Polygon (Vieleck) ist die Benennung einer jeden beliebigen geradlinigen Figur. Jede Linie, die zwei Ecken einer Figur verbindet, ohne mit einer Seite zusammenzufallen, heißt Diagonallinie, wodurch sich jede Figur in Dreiecke zerlegen läßt.

Definition. Das Dreieck ist eine von drei Geraden begrenzte Figur.

Siebenter Satz. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke ist je eine Seite kleiner als die Summe der beiden andern.

Fig. 17. Thes. $\begin{cases} AB \angle AC + BC, \\ AC \angle AB + BC, \\ BC \angle AB + AC. \end{cases}$

Bew. Es ist $AB \angle AC + BC$, weil die Gerade AB sowohl, als $(AC + CB)$ einen Weg von A nach B ausdrückt, und der gerade der kürzeste ist (Grundsatz). Ebenso verhält es sich bei den andern Thesen. w. z. bew. w.

I. Zusatz. In jedem Polygon ist je eine Seite kleiner als die Summe aller andern.

II. Zusatz. Wenn man von einem Punkte im Innern eines Dreieckes zwei Gerade nach zwei Ecken des Dreieckes zieht, so ist die Summe dieser zwei Linien kleiner als die Summe der Entfernungen des dritten Eckes von den nämlichen zwei Ecken.

Fig. 18. Dat. D ist im $\triangle$ ABC;
Thes. $DA + DB \angle CA + CB$.

Bew. Man verlängere z. B. AD bis E, so ist

$$AE \angle AC + CE$$
$$DB \angle DE + EB$$
$$\overline{AE + DB < AC + BC + DE}$$
$$DE = DE$$
$$\overline{DA + DB < CA + CB.}$$
w. z. bew. w.

III. Zusatz. Wenn man von einem Punkte außerhalb eines Dreieckes zwei Gerade nach zwei Ecken desselben zieht und es schneidet eine dieser Geraden eine Dreieck-Seite, so ist die Summe der zwei sich nicht schneidenden Geraden kleiner als die Summe der zwei sich schneidenden.

Fig. 19. Dat. D ist außer dem $\triangle$ ABC;
Thes. $DA + CB \angle CA + DB$.

Bew. Es ist $DA < DE + EA$

$$CB \angle CE + EB$$
$$\overline{DA + CB \angle CA + DB.}$$
w. z. bew. w.

IV. Zusatz. Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten des einen einzeln gleich zweien Seiten des andern, die von diesen Seiten gebildeten Winkel aber ungleich, so sind die dritten Seiten in derselben Ordnung ungleich.

Fig. 20. Dat. $\begin{cases} AC = DE \\ BC = EF \\ \angle ACB > \angle DEF; \end{cases}$

Thes. $AB > DF.$

Bew. Legt man D auf A und DE in die Richtung von AC, so muß E auf C fallen ($AC = DE$), ferner muß EF zwischen CA und CB fallen ($\angle ACB > \angle DEF$), endlich kann der Punkt F, je nachdem die beiden Winkel wenig oder viel von einander verschieden sind, eine dreifache Lage haben, entweder fällt er über das Dreieck hinaus, wie von Nro. I. nach F', oder auf einen Punkt der Seite AB, wie von Nro. II. nach F'', oder in das Dreieck, wie von Nro. III. nach F'''.

Für Nro. I. ist $F'A + BC < F'C + BA$ (III. Zusatz)

$$BC = F'C \; (= FE)$$

$$\overline{}$$

$$F'A < BA \text{ oder}$$

$$AB > DF \; (F'A = DF). \text{ w. z. b. w.}$$

Für Nro. II. erscheint AF'', welches gleich DF ist, als ein Theil von AB, daher ist

$$AB > AF. \text{ w. z. bew. w.}$$

Für Nro. III. ist $F'''A + F'''C < BA + BC$

$$F'''C = BC (= FE)$$

$$\overline{}$$

$$F'''A < BA \text{ oder}$$

$$AB > DF (F'''A = DF). \text{ w. z. b. w.}$$

V. Zusatz. Wenn in zwei Dreiecken die drei Seiten des einen einzeln den drei Seiten des andern gleich sind, so

sind die den gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel ebenfalls einander gleich.

Dat. $\begin{cases} AB = DE, \\ AC = DF, \\ BC = EF; \end{cases}$

Fig. 21.

Thes. $\begin{cases} \angle C = \angle F, \\ \angle B = \angle E, \\ \angle A = \angle D. \end{cases}$

Bew. Wäre $\angle$ C nicht gleich $\angle$ F, so wäre entweder $\angle C > \angle F$ oder $\angle C < \angle F$. Wäre nun $\angle C > \angle F$, so wäre auch

$$AD > DE \text{ (IV. Zusatz)},$$

was aber gegen die Daten, daher unmöglich ist, also ist auch unmöglich

$$\angle C > \angle F.$$

Ebenso kann gezeigt werden, daß $\angle$ C nicht kleiner seyn kann als $\angle$ F.

Da nun $\angle$ C nicht größer und nicht kleiner seyn kann als F, so ist:

$$\angle C = \angle F. \text{ w. z. bew. w.}$$

Dasselbe gilt von den andern Thesen.

§. 15.

Erklärung. Die Winkel einer Figur heißen Polygonswinkel. Jeder Nebenwinkel eines Polygonswinkels heißt Außenwinkel, weil er durch die Verlängerung einer Seite außerhalb der Figur entsteht. Gesetze der Polygonswinkel.

Achter Satz. Lehrsatz.

In jedem Polygone ist die Summe aller nach ein und derselben Seite hin liegenden Außenwinkel gleich vier rechten.

Fig. 22. Thes. $\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e = 4R.$

Bew. Dreht man die Verlängerung von AB, nämlich

BF um B, bis sie in die Lage BG fällt, dreht ferner um C bis die weitere Verlängerung BF in die Lage CH kommt, u. s. f., bis sie in die Lage DI, EK und zuletzt wieder in die Lage AB kommt, so hat BF eine ganze Umdrehung gemacht, daher ebenso viel und so große Winkel beschrieben, als um einen Punkt herum liegen können; da aber alle Winkel um einen Punkt herum gleich vier rechten sind, so ist
$\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e = 4R$. w. z. b. w.

I. Zusatz. Die drei Winkel eines Dreieckes sind zusammen gleich zwei rechten.

Fig. 23. Thes. $\angle A + \angle B + \angle C = 2R$.

Bew. Verlängert man AB bis D, BC bis E, und CA bis F, so ist

$$\angle a + \angle x = 2R$$
$$\angle b + \angle y = 2R$$
$$\angle c + \angle z = 2R$$

$\angle a + \angle b + \angle c + \angle x + \angle y + \angle z = 6R$; es ist aber
$\angle a + \angle b + \angle c \qquad = 4R$

$$\angle x + \angle y + \angle z = 2R \text{ oder}$$
$$\angle A + \angle \; + B \angle C = 2R. \text{ w. z. b. w.}$$

I. Anmerkung. Daraus sieht man, daß, wenn zwei Winkel eines Dreieckes bekannt sind, man den dritten findet, wenn man die beiden von zwei rechten abzieht. Ebenso sieht man leicht ein, daß die Winkel eines Viereckes gleich vier rechten, die eines Fünfeckes gleich sechs rechten, u. s. w. sind, und daß man überhaupt die Summe der Winkel eines Polygons dadurch findet, daß man von der Zahl, die die Anzahl der Seiten ausdrückt, die Zahl zwei abzieht, und den Rest mit zwei multiplizirt. Bezeichnet man daher die Seitenzahl durch n, die Summe der Winkel durch S, so ist:

$$S = 2\,(n - 2)\,R.$$

Sind nun in einem Polygone alle Winkel einander gleich, so ist ein jeder der nte Theil von der Summe, weil diese aus n Winkeln besteht; bezeichnet man nun einen solchen Winkel durch A, so ist:

$$A = \frac{2\,(n-2)}{n}\,R.$$

Sind z. B. in einem Dreiecke alle drei Winkel einander gleich, so ist:

$$A = \tfrac{2}{3}\,R;$$

in einem Vierecke von vier gleichen Winkeln ist

$$A = R.$$

II. Anmerkung. Demnach kann man die Dreiecke in Bezug auf die Winkel in folgende drei Gattungen eintheilen: 1) spitzwinklige, in denen alle drei Winkel spitz sind; 2) rechtwinklige, in denen ein Winkel ein rechter ist, die beiden andern sind alsdann nothwendig spitz, und zusammen gleich einem rechten; die Seite, die dem rechten Winkel gegenübersteht, heißt Hypotenuse, von den beiden andern heißt jede Kathete; 3) stumpfwinklige, in denen ein Winkel stumpf ist.

II. Zusatz. In jedem Dreiecke ist ein Außenwinkel gleich der Summe der zwei innern entferntern, d. h. gleich der Summe aus seinem Wechsel- und seinem correspondirenden Winkel.

Fig. 24. Thes. $\angle CBD = \angle BAC + \angle ACB.$

Bew. Es ist $\angle CBD + \angle CBA = 2R$ (Nebenw.)
ferner ist $\angle CBA + \angle BAC + \angle ACB = 2R$ (I. Zusatz)

$$\angle CBD + \angle CBA = \angle CBA + \angle BAC + \angle ACB$$

oder $\angle CBD = \angle BAC + \angle ACB.$ w. z. b. w.

Anmerk. Daraus folgt, daß für jedes Dreieck ein Außenwinkel größer ist als jeder der zwei innern entferntern.

III. Zusatz. Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel einander gleich sind, so sind es auch die dritten.

Fig. 25. Dat. $\begin{cases} \angle A = \angle D, \\ \angle C = \angle F; \end{cases}$

Thes. $\angle B = \angle E.$

Bew. Es ist $\angle A + \angle B + \angle C = 2R$

$$\angle D + \angle E + \angle F = 2R$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle D + \angle E + \angle F$$

$$\angle A + \angle C = \angle D + \angle F \text{ (Dat.)}$$

$\angle B = \angle E$. w. z. b. w.

§. 16.

Congruenz der Dreiecke und ihre nächsten Folgerungen.

Erklärung. In jedem Dreiecke kommen, außer der Größe des Dreieckes selbst als begrenzte Ebene und außer allen Nebengrößen, sechs Größen vor, die wesentlich zum Dreiecke gehören, nämlich drei Seiten und drei Winkel. Wir haben im Vorhergehenden schon manche Beschränkungen kennen gelernt, denen diese Größen unterworfen sind; im Nachfolgenden nun wollen wir zeigen, daß drei von diesen Größen, worunter wenigstens **eine** Seite seyn muß, das Dreieck und daher die übrigen Größen bestimmen. Der Weg, den man zu dieser Untersuchung einschlagen kann, ist mehrfach, und wir wollen den durch Vergleichung zweier Dreiecke wählen. Haben nämlich zwei Dreiecke drei Größen bezüglich einander gleich, und ist daraus bewiesen, daß sie congruent sind, so folgt, daß auch alle übrigen Größen bezüglich gleich sind, und das Dreieck durch diese drei Größen vollkommen bestimmt ist.

Neunter Satz. Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken alle drei Seiten einzeln einander gleich sind, so sind die Dreiecke congruent.

Fig. 26. Dat. $\begin{cases} AB = DE, \\ AC = DF, \\ BC = EF; \end{cases}$

Thes. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Bew. Wenn man D auf A und DE in die Richtung von AB legt, so muß E auf A fallen (AB = DE), ferner muß

DF in die Richtung von AC fallen ($\angle A = \angle D$ nach dem Satze: wenn in zwei Dreiecken alle drei Seiten einzeln einander gleich sind, so sind auch die den gleichen Seiten gegenüberstehenden Winkel einander gleich), ebenso muß F auf C fallen (AC = DF), endlich muß EF auf AC fallen und genau decken (weil die Endpunkte auf einander liegen), daher ist:

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$. w. z. b. w.

Zehnter Satz. Lehrsatz.

Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten und ein Winkel, die beiderseits in gleicher Ordnung liegen, einzeln in dem einen so groß als im andern sind, so können die Dreiecke immer congruent seyn.

Anmerkung. Da der gegebene Winkel entweder zwischen den zwei gegebenen Seiten, oder einer der beiden Seiten gegenüberliegen kann, so zerfällt obiger Satz in zwei.

A. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in ihnen zwei Seiten und der davon eingeschlossene Winkel einzeln einander gleich sind.

Fig. 27. Dat. $\begin{cases} AB = DE, \\ \angle A = \angle D, \\ AC = DF; \end{cases}$

Thes. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Bew. Wenn man D auf A und DE in die Richtung von AB legt, so muß E auf B fallen (AB = DE), ferner muß DF in die Richtung von AC fallen ($\angle A = \angle D$), ebenso muß F auf C fallen (AC = DF), endlich muß EF auf BC fallen und genau decken (weil die Endpunkte auf einander liegen), daher ist:

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$. w. z. b. w.

I. Zusatz. Wenn in zwei Dreiecken zwei Seiten ein-

zeln einander gleich, die dritten Seiten aber ungleich sind, so sind die von ersteren Seiten eingeschlossenen Winkel in derselben Ordnung ungleich.

Fig. 28. Dat. $\begin{cases} AC = DF, \\ BC = EF, \\ AB > DE; \end{cases}$

Thes. $\angle ACB > \angle DFE$.

Bew. Wäre $\angle C = \angle F$, so wäre nach Lehrsatz $\triangle ABC \cong \triangle DFE$ und $AB = DE$, was gegen die Daten, daher unmöglich ist, also ist auch unmöglich

$$\angle C = \angle F.$$

Wäre aber $\angle C < \angle F$, so wäre auch $AB < DE$, was gegen den 7ten Lehrsatz, IV. Zusatz, daher unmöglich ist, also ist auch unmöglich

$$\angle C < \angle F.$$

Da nun $\angle C$ weder gleich $\angle F$, noch kleiner als $\angle F$ seyn kann, so muß

$\angle C > \angle F$ seyn. w. z. b. w.

II. Zusatz. In jedem gleichschenkligen Dreiecke sind die beiden Winkel an der Grundlinie einander gleich.

Fig. 29. Dat. $AC = BC$;
Thes. $\angle ABC = \angle BAC$.

Bew. Man schneide von C aus die gleichen Stücke CD und CE von den Seiten ab, so bleiben gleiche Stücke AD und BE übrig, und ziehe EA und DB, so ist

in $\triangle ACE$ u. $\triangle BDC$

$$AC = BC$$
$$CE = CD$$
$$\angle ACE = \angle BCD$$

$\triangle ACE \cong \triangle BCD$ und

$$AE = BD$$
$$\angle AEC = \angle BDC.$$

Ferner ist in △ ABE u. △ ABD

$$AB = AB$$
$$AE = BD$$
$$BE = AD$$

△ ABE ≌ △ ABD und

∠ ABE = ∠ BAD oder

∠ ABC = ∠ BAC. w. z. b. w.

III. Zusatz. In jedem gleichseitigen Dreiecke sind alle Winkel einander gleich.

Fig. 30. Dat. AB = AC = BC;
Thes. ∠ C = ∠ B = ∠ A.

Bew. Da AB = AC, so ist ∠ C = ∠ B, und da ferner AC = BC, so ist ∠ B = ∠ A, daher ist ∠ C = ∠ B = ∠ A. w. z. b. w.

IV. Zusatz. Wenn in einem Dreiecke zwei Winkel einander gleich, so sind auch die zwei diesen Winkeln gegenüberstehenden Seiten gleich.

Fig. 31. Dat. ∠ CAB = ∠ CBA;
Thes. BC = AC.

Bew. Wäre BC nicht gleich AC, so wäre vielleicht BC größer als AC, alsdann wäre aber ein Theil von BC, nämlich BD = AC, zieht man nun AD, so wäre

in △ ABC u. △ ABD

$$AB = AB$$
$$AC = BD$$
$$\angle BAC = \angle ABD$$

△ ABC ≌ △ ABD, was unmöglich ist, da △ ABD nur ein Theil von △ ABC ist, also ist auch unmöglich, daß BC größer ist als AC. Ebenso kann gezeigt werden, daß AC nicht größer als BC, d. h. BC nicht kleiner als AC seyn kann.

Da nun keine von den beiden Seiten AC und BC größer seyn kann als die andere, so sind sie gleich, daher ist BC = AC. w. z. b. w.

V. Zusatz. Wenn in einem Dreiecke alle Winkel einander gleich sind, so sind auch alle Seiten einander gleich.

Fig. 30. Dat. ∠ A = ∠ B = ∠ C;
Thes. BC = AC = AB.

Bew. Da ∠ A = ∠ B, so ist BC = AC, da ferner
∠ B = ∠ C, so ist AC = AB, daher
BC = AC = AB. w. z. b. w.

VI. Zusatz. In jedem Dreiecke steht dem größern Winkel auch die größere Seite gegenüber.

Fig. 32. Dat. ∠ C > ∠ A;
Thes. AB > BC.

Bew. Da ∠ C größer ist als ∠ A, so ist ein Theil des Winkels C, nemlich ∠ ACD = ∠ DAC, daher auch AD = DC; nun ist aber

BC < BD + DC oder
BC < BD + DA oder
BC < AB. w. z. b. w.

VII. Zusatz. In jedem Dreiecke steht der größern Seite nach der größere Winkel gegenüber.

Fig. 33. Dat. AB > BC;
Thes. ∠ ACB > BAC.

Bew. Da AB größer ist als BC, so ist ein Theil von BA gleich BC, nemlich BD = BC, und daraus folgt ∠ BCD = ∠ BDC; nun ist aber ∠ BDC > ∠ DAC, daher auch ∠ BCD > ∠ DAC, und um so mehr

∠ BCA > ∠ BAC. w. z. b. w.

B. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in ihnen zwei Seiten und ein gegenüberliegender einander gleich, die Summe der beiden andern gegenüberliegenden Winkel aber entweder größer oder kleiner als zwei rechte ist.

Fig. 34. Dat. $\begin{cases} AB = DE, \\ \angle A = \angle D, \\ BC = EF, \\ \angle C + \angle F > \text{od.} < 2\,R; \end{cases}$

Thes. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Bew. Wenn man D auf A und DE in die Richtung von AB legt, so muß E auf B fallen ($AB = DE$), ferner muß DF in die Richtung von AC fallen ($\angle A = \angle D$), ebenso muß F auf C fallen; denn fiele F innerhalb C, z. B. nach G, so würde EF als BG erscheinen, daher $EF = BG$ und daher $BG = BC$ seyn, woraus folgen würde

$\angle BCG = \angle BGC$; nun wäre aber

$\angle BGC + \angle BGA = 2\,R$, daher auch

$\angle BCG + \angle BGA = 2\,R$ oder

$\angle C + \angle F = 2\,R$, was gegen die Daten, daher unmöglich ist, also ist auch unmöglich, das F innerhalb C fällt. Ebenso kann gezeigt werden, daß F nicht ausserhalb C in die Verlängerung von AC fallen kann.

Da nun F weder innerhalb noch ausserhalb C, aber jedenfalls auf AC fällt, so muß F auf C fallen; endlich muß auch EF auf BC fallen und genau decken, weil die Endpunkte auf einander liegen, daher ist:

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$. w. z. bew. w.

Anmerkung. Wäre in den Daten nicht gesagt, daß die Summe der beiden andern gegenüberliegenden Winkel größer oder kleiner als zwei rechte sey, so hätte das zweite Dreieck bei denselben Daten eine andere Größe haben können, so daß F vielleicht innerhalb, vielleicht ausserhalb C gefallen wäre, alsdann wäre aber die Summe der beiden Dreieckswinkel bei F und C gleich zwei rechten gewesen, durch welches Gesetz die beiden Dreiecke in diesem Falle verbunden sind. Wir werden weiter unten bei den Aufgaben nochmal darauf zurückkommen. Man wird leicht einsehen, daß, wenn die zwei gegebenen Winkel den größern Seiten gegenüberliegen, die Summe der zwei andern gegenüberliegenden Winkel kleiner als zwei rechte seyn muß, da offenbar jeder für sich, als der nicht größte Winkel eines Dreieckes, kleiner als

ein rechter seyn muß, daher findet man in manchen Lehrbüchern folgenden Satz unter den Congruenzfällen aufgeführt, der indeß im obigen allgemeineren enthalten ist:

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in ihnen zwei Seiten und der der größern Seite gegenüberliegende Winkel einandergleich sind.

Fig. 35. Dat. $\begin{cases} AB = DE, \\ \angle A = \angle D, \\ BC = EF; \end{cases}$ $BC > AB$;

Thes. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Bew. Wenn man D auf A und DE in die Richtung von AB legt, so muß E auf B fallen ($AB = DE$), ferner muß DF in die Richtung von AC fallen ($\angle A = \angle D$), ebenso muß F auf C fallen; denn fiele F innerhalb C, z. B. nach G, so wäre $BG = EF$, daher auch

$BG = BC$, woraus folgen würde

$\angle BGC = \angle BCG$, es wäre aber

$\angle BGC > \angle GAB$, daher auch

$\angle BCA > \angle CAB$, was unmöglich ist, da $BC > AB$, also ist auch unmöglich, daß F innerhalb C fällt. Ebenso kann gezeigt werden, daß F nicht über C hinaus in die Verlängerung von AC fallen kann. Da nun F weder innerhalb noch ausserhalb C, aber doch jedenfalls auf AC fällt, so muß F auf C fallen; endlich muß EF auf BC fallen und genau decken, weil die Endpunkte aufeinander liegen, daher ist:

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$. w. z. b. w.

Eilfter Satz. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite und zwei Winkel in ihnen bei gleicher Ordnung gegenseitig gleich sind.

Anmerkung. Dieser Satz zerfällt, da entweder die beiden gegebenen Winkel an der gegebenen Seite oder nur ein anliegender und der gegenüberliegende gegeben seyn können, in folgende zwei Sätze:

A. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegenseitig einander gleich sind.

Fig. 36. Dat. $\begin{cases} AB = DE, \\ \angle A = \angle D, \\ \angle B = \angle E; \end{cases}$

Thes. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Bew. Wenn man D auf A und DE in die Richtung von AB legt, so muß E auf B fallen ($AB = DE$), ferner muß DF in die Richtung von AC ($\angle A = \angle D$) und EF in die Richtung von BC ($\angle B = \angle E$) fallen, endlich muß F auf C fallen, (zwei Gerade schneiden sich nur in einem Punkte), daher ist:

$$\triangle ABC \cong \triangle DEF. \text{ w. z. b. w.}$$

B. Zwei Dreiecke sind congruent, wenn in ihnen eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel einzeln einander gleich sind.

Fig. 36. Dat. $\begin{cases} AB = DE, \\ \angle A = \angle D, \\ \angle C = \angle F; \end{cases}$

Thes. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Bew. Wenn man D auf A, und DE in die Richtung von AB legt, so muß E auf B fallen ($AB = DF$), ferner muß DF in die Richtung von AC fallen ($\angle A = \angle D$), ebenso muß F auf C fallen; denn fiele F ausserhalb C in die Verlängerung von AC, nemlich nach H, so wäre

$$\angle EFD = \angle AHB,$$

es ist aber $\angle DFE = \angle ACB$

$$\angle AHB = \angle ACB$$ was gegen den 8ten Lehrsatz II. Zusatz, daher unmöglich ist, also ist auch unmöglich, daß F ausserhalb C fällt. Ebenso kann gezeigt werden, daß F nicht innerhalb C fällt. Da nun F weder innerhalb noch ausserhalb C, jedenfalls aber auf AC fällt, so

muß F auf C fallen, endlich muß EF auf BC fallen und genau decken, weil die Endpunkte auf einander liegen, daher ist:

$\triangle$ ABC $\cong$ $\triangle$ DEF. w. z. b. w.

I. Anmerkung. Dieser Beweis hätte wörtlich so gegeben werden können, wie in Nro. I., da man aus einem frühern Satze die Gleichheit der Winkel B und E weiß.

II. Anmerkung. Es ist einleuchtend, daß zwei Polygone congruent sind, wenn sie in derselben Ordnung aus gleichviel einzeln einander congruenten Dreiecken bestehen, daher dürfen auch in zwei Polygone nur drei Größen, worunter wenigstens ein Winkel ist, unbekannt seyn, und man erhält folgende Sätze:

Zwei Polygone sind congruent, wenn in ihnen alle Größen mit Ausnahme

1) Einer Seite und zwei der nächsten Winkel,

2) zweier Seiten und einem der nächsten Winkel

als gleich bekannt sind.

Die Beweise kann man führen durch Zerlegen im Dreiecke oder durch unmittelbares Aufeinanderlegen.

§ 17.

Eigenschaften des Perpendikels.

Erklärung. Wenn zwei gerade Linien einen rechten Winkel mit einander bilden, so sagt man, sie stehen auf einander senkrecht oder perpendikulär; jede einzelne Linie heißt eine Senkrechte oder ein Perpendikel auf die andere. Jede andere Linie heißt alsdann schief oder schräg.

Zwölfter Satz. Lehrsatz.

Von einem Punkte ausserhalb einer Geraden gibt es nur ein einziges Perpendikel auf diese.

Fig. 37. Dat. $\angle$ CDB = R;

Thes. CD durch C das einzige Perpendickel auf AB.

Bew. Zieht man durch C eine beliebige Gerade auf AB z. B. CE, so ist

$\angle$ CED $<$ R als spitziger Winkel eines rechtwinkligen Dreieckes, daher CE kein Perpendickel von C auf AB. Da aber dieß von jeder andern Geraden gilt, so ist CD das einzige Perpendikel von C auf AB. w. z. b. w.

Zusatz. Die Senkrechte von einem Punkte auf eine Gerade gibt die kürzeste Entfernung des Punktes von der Geraden an.

Fig. 37. Dat. $\angle$ CDB $=$ R;
Thes. CD die kürzeste aller Geraden von C auf AB.

Bew. Zieht man von C auf AB eine beliebige andere Gerade, z. B. CE, so ist

CE $>$ CD als Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, da aber dieses von jeder andern Geraden gilt, so ist CD die Entfernung des Punktes C von AB. w. z. b. w.

Dreizehnter Satz. Lehrsatz.

Durch einen Punkt einer Geraden gibt es nur ein Perpendikel auf diese.

Fig. 38. Dat. $\angle$ DCB $=$ R;
Thes. CD das einzige Perpendikel durch C auf AB.

Bew. Zieht man eine beliebige andere Gerade durch C z. B. CE, so ist

$\angle$ ECB $<$ R als Theil des rechten Winkels DCB, daher ist CE keine Senkrechte durch C auf AB. Da dieses aber von jeder andern Geraden durch C gilt, so ist CD das einzige Perpendikel durch C auf AB. w. z. b. w.

Vierzehnter Satz. Lehrsatz.

Wenn eine Gerade im Mittelpunkte einer andern Geraden auf dieser senkrecht steht, so ist jeder Punkt der Senkrechten gleich weit von den Endpunkten der erstern entfernt.

Fig. 39. Dat. $\begin{cases} AC = BC, \\ \angle DCB = R; \end{cases}$

Thes. $DA = DB$.

Bew. Es ist

$$\left.\begin{array}{l} DC = DC \\ \angle DCA = \angle DCB \\ CA = CB \end{array}\right\} \text{Dat.}$$

$\triangle ACD \cong \triangle BCD$ daher

$DA = DB$. w. z. b. w.

I. Zusatz. Jeder Punkt neben der Senkrechten ist von den beiden Endpunkten ungleich weit entfernt, so daß er dem Endpunkte näher liegt, auf dessen Seite er sich befindet.

Fig. 40. Dat. $\begin{cases} AC = CB, \\ \angle DCB = R; \end{cases}$

Thes. $EA < EB$.

Bew. Zieht man FA, so ist

$EA < EF + FA$

$FA = FB$ (Lehrsatz)

$EA < EF + FB$ oder

$EA < EB$. w. z. b. w.

Fünfzehnter Satz. Lehrsatz.

Wenn eine Gerade durch zwei Punkte geht, wovon jeder von den Endpunkten einer andern Geraden gleich weit entfernt ist, so steht sie auf dieser senkrecht.

Fig. 41. Dat. $\begin{cases} CA = CB, \\ DA = DB; \end{cases}$

Thes. $\angle CEB = R.$

Bew. Es ist in $\triangle ACD$ und $\triangle BCD$

$$\begin{aligned} CA &= CB \\ DA &= DB \\ CD &= CD \\ \hline \triangle ACD &\cong \triangle BCD \text{ und} \\ \angle ACD &= \angle BCD. \end{aligned}$$

Ferner ist in $\triangle ACE$ und $\triangle BCE$

$$\begin{aligned} CA &= CB \\ \angle ACE &= \angle BCE \\ CE &= CE \\ \hline \triangle ACE &\cong \triangle BCE, \text{ daher} \\ \angle AEC &= \angle BEC \text{ oder} \\ \angle CEB &= R. \text{ w. z. b. w.} \end{aligned}$$

Sechzehnter Satz. Lehrsatz.

Zwei schräge Linien, von einem Punkte aus auf eine Gerade, deren Fußpunkte vom Fußpunkte des Perpendikels, vom nemlichen Punkte aus auf die nemliche Gerade gezogen, gleichweit entfernt sind, sind gleich lang.

Fig. 42. Dat. $\begin{cases} \angle CFE = \angle DFE, \\ CF = DF; \end{cases}$

Thes. $EC = ED.$

Bew. Es ist

$$\begin{aligned} FC &= FD \\ \angle CFE &= \angle DFE \\ EF &= EF \\ \hline \triangle FCE &\cong \triangle FDE \\ EC &= ED. \text{ w. z. b. w.} \end{aligned}$$

Zusatz. Wenn von zwei schrägen Linien vom einem gemeinschaftlichen Punkte aus auf dieselbe Gerade der Fußpunkt einer vom Fußpunkte des Perpendikels weiter entfernt ist, als der der andern, so ist sie auch größer.

Fig. 43. Dat. $\begin{cases} \angle EDB = R, \\ DB > DC; \end{cases}$

Thes. $EB > EC.$

Bew. Verlängert man ED bis F, so daß $DF = DE$ wird, macht $DG = DC$, und zieht EG, so ist

$$EG = EC \text{ (Lehrsatz)}.$$

Zieht man ferner FG und FB, so ist $FG = EG$

$$FB = EB.$$

Nun ist aber $GE + GF < BE + BF$ oder

$$2\,GE < 2\,BE \text{ oder}$$

$$EG < EB. \text{ w. z. b. w.}$$

Siebenzehnter Satz. Lehrsatz.

Wenn zwei schräge gerade Linien von einem gemeinschaftlichen Punkte aus auf dieselbe Gerade gleich lang sind, so sind ihre Fußpunkte vom Fußpunkte des Perpendikels gleich weit entfernt.

Fig. 44. Dat. $\begin{cases} \angle CFD = \angle CFE, \\ CD = CE; \end{cases}$

Thes. $FD = FE.$

Bew. Es ist

$$CF = CF$$

$$\angle CFD = \angle CFE$$

$$CD = CE$$

$$\triangle CFD \cong \triangle CFE$$

$$FD = FE. \text{ w. z. b. w.}$$

I. Zusatz. Wenn von zwei schrägen Geraden die eine länger ist, als die andere, so steht sie auch weiter vom Perpendickel ab.

Fig. 45. Dat. { ∠ CFD = ∠ CFE,
CE > CD;
Thes. FE > FD.

Bew. Wäre FE = FD, so wäre CE = CD, was gegen die Daten, daher unmöglich ist, also ist auch unmöglich

FE = FD.

Wäre FE < FD, so wäre auch CE < CD, was ebenfalls gegen die Daten, daher unmöglich ist, also ist auch unmöglich

FE < FD.

Da nun FE weder gleich FD, noch kleiner als FD seyn kann, so ist

FE > FD. w. z. b. w.

II. Zusatz. Von einem Punkte auf eine Gerade gibt es nur je zwei gleich lange schräge Linien.

Fig. 46. Dat. CD = CE;
Thes. Nur diese zwei Linien sind bei dieser Länge möglich.

Bew. Zieht man CF senkrecht auf AB, so ist FD = FE; zieht man ferner noch zwei Gerade, eine innerhalb CE, z. B. CG, und eine ausserhalb CE, z. B. CH, so ist

CG < CE
CH > CE.

Da aber dieses von jeder andern Geraden von C auf AB gibt, so gibt es von einem Punkte auf eine Gerade auf einer Seite des Perpendikels nur eine einzige Gerade von bestimmter Länge, dieselbe Länge aber haben die Linien auf der andern Seite des Perpendikels bei gleichen Abständen, daher gibt es von einem Punkte auf eine Gerade nur je zwei gleich lange gerade Linien. w. z. b. w.

§ 18.

Achtzehnter Satz. Lehrsatz.

Einige Sätze vom gleichschenkligen Dreiecke.

Wenn man in einem gleichschenkligen Dreiecke von der Spitze eine Senkrechte auf die Grundlinie zieht, so halbirt sie die Grundlinie und den Winkel an der Spitze.

Fig. 47.

Dat. $\begin{cases} AC = BC, \\ \angle CDA = \angle CDB; \end{cases}$

Thes. $\begin{cases} AD = DB, \\ \angle ACD = \angle BCD. \end{cases}$

Bew. Es ist in $\triangle$ ACD und $\triangle$ BCD

$$AC = BC$$
$$CD = CD$$
$$\angle CDA = \angle CDB = R$$

$\angle$ ACD $\cong$ $\angle$ BCD und

AD = DB, w. z. b. w.

$\angle$ ACD = $\angle$ BCD. w. z. b. w.

Neunzehnter Satz. Lehrsatz.

Wenn man in einem gleichschenkligen Dreiecke von der Spitze auf den Mittelpunkt der Grundlinie eine Gerade zieht, so steht diese auf der Grundlinie senkrecht und halbirt den Winkel an der Spitze.

Fig. 47.

Dat. $\begin{cases} AC = BC, \\ AD = BD; \end{cases}$

Thes. $\begin{cases} \angle ADC = \angle BDC, \\ \angle ACD = \angle BCD. \end{cases}$

Bew. Es ist in △ ACD und △ BCD

$$AC = BC$$
$$AD = DB$$
$$CD = CD$$

$$\triangle ACD \cong \triangle BCD \text{ und}$$
$$\angle ADC = \angle BDC, \text{ w. z. b. w.}$$
$$\angle ACD = \angle BCD. \text{ w. z. b. w.}$$

Zusatz. Wenn man in einem gleichschenkligen Dreiecke die Grundlinie senkrecht halbirt, so geht diese Halbirungslinie durch die Spitze und halbirt den Winkel.

Fig. 48. Dat. $\begin{cases} AC = BC, \\ AD = DB, \\ \angle ADE = \angle BDE; \end{cases}$

Thes. DE geht durch C.

Bew. Ginge DE nicht durch die Spitze C, so könnte man CD ziehen, und diese wäre ebenfalls senkrecht auf AB (voriger Lehrsatz), es gäbe alsdann durch D zwei Perpendikel auf AB, was unmöglich ist, also ist auch unmöglich, daß DE nicht durch die Spitze C geht, d. h. DE geht durch die Spitze C. w. z. b. w.

§ 19.

Definition. Zwei gerade in einer Ebene liegende Linien, die sich in keinem Orte schneiden, so weit man sie auch verlängert denkt, heißen parallel oder Parallellinien. Von den Parallellinien.

Erklärung. Schneidet man zwei Parallellinien durch eine dritte Gerade, so entstehen an den beiden Durchschnitten die eben erwähnten vier Gattungen von Winkeln, für welche aus dem Parallelismus bestimmte Gesetze hervorgehen werden. Umgekehrt wird man auch aus einem Winkelgesetze auf die Lage der Linien schließen können. Man kann zwei Parallellinien mit der dritten schneidenden Geraden auch als ein Dreieck

ansehen, dessen Spitze unendlich weit von den beiden Ecken der Basis entfernt ist, oder, da durch diese Entfernung der Spitze von der Basis nothwendig der Winkel an der Spitze immer kleiner wird, als ein Dreieck, in welchem der Winkel an der Spitze gleich Null ist. Einige definiren Parallellinien als solche gerade Linien, die in allen ihren Punkten gleich weit von einander entfernt sind, und nennen den Perpendikel von einem Punkte der einen Geraden auf die Richtung der andern die Entfernung.

§ 20.

Zwanzigster Satz. Lehrsatz.

Schlüße von Winkel-Gesetzen auf die Lage der Linien.

Wenn zwei Gerade von einer dritten geschnitten werden, und es sind zwei innere entgegengesetzte Winkel zusammen gleich zwei rechten, so sind die Linien parallel.

Fig. 49. Dat. $\angle x + \angle y = 2R$;
Thes. AB # CD.

Bew. Wäre AB nicht parallel zu CD, so müßte entweder auf der Seite BD oder auf der Seite AC ein Durchschnitt der beiden Linien statt finden; wäre dieser Durchschnitt auf der Seite BD, so entstünde ein Dreieck, in welchem zwei Winkel zusammen gleich zwei rechten wären, nemlich

$$\angle x + \angle y = 2R,$$

was gegen einen früheren Satz, daher unmöglich ist, also ist auch unmöglich, daß AB und CD sich auf der Seite BD schneiden. Ebenso wenig kann auf der Seite AC ein Durchschnitt statt finden, weil auch

$$\angle z + \angle v = 2R.$$

Da nun AB und CD sich in keiner Richtung schneiden können, so ist

AB # CD. w. z. b. w.

I. Zusatz. Wenn zwei Gerade von einer dritten geschnitten werden, und es sind:

1) irgend ein Paar entgegengesetzte Winkel gleich zwei rechten;
2) irgend ein Paar Wechselwinkel gleich;
3) irgend ein Paar correspondirende Winkel gleich;
4) irgend ein Paar innere und äussere Wechselwinkel zusammen gleich zwei rechten, so sind die Linien parallel.

Anmerkung. Aus jedem dieser Daten folgt nach früheren Sätzen, daß die Summe zweier innerer entgegengesetzter Winkel gleich zwei rechten ist, woraus der Parallelismus der beiden Linien folgt.

II. Zusatz. Wenn zwei Gerade auf einer dritten senkrecht stehen, so sind sie parallel.

Einundzwanzigster Satz. Lehrsatz.

Wenn zwei Gerade von einer dritten geschnitten werden, und es sind ein Paar innere entgegengesetzte Winkel zusammen kleiner als zwei rechte, so schneiden sich die Linien auf dieser Seite.

Fig. 50. Dat. $\angle BFE + \angle DEF < 2R$;
Thes. AB u. CD schneiden sich auf der Seite BD.

Bew. Wenn man durch E die Linie EG zieht, so daß $\angle BFE + \angle FEG = 2R$ ist, so ist $\angle FEG > \angle FED$; daher kommt EG außerhalb ED zu liegen. Zieht man nun von E nach einem beliebigen Punkt von AB eine Gerade EH, macht $HI = HE$, und zieht die Verbindungslinie EI, so ist

$$\angle HIE = \angle IEG,$$
$$\angle HIE = \angle HEI,$$
$$\overline{\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad}$$
$$\angle IEG = \angle HEI;$$ d. h.

die Linie EI halbirt den Winkel HEG. Macht man ferner $IK = IE$ und zieht KE, so ist ebenso $\angle IEK = \angle KEG$.

Fährt man nun auf diese Weise fort, so wird durch fortgesetztes Halbiren der Winkel von EG mit der Verbindungslinie kleiner als ∠ GED, alsdann fällt aber auch die Verbindungslinie über ED hinaus, das dadurch durch die Spitze in ein Dreieck geht, und daher nothwendig durch einen Punkt der Grundlinie gehen muß, welche ein Stück von AB ist, d. h. ED schneidet AB. w. z. b. w.

Zusatz. Wenn irgend eines der vier Winkelgesetze des obigen Zusatzes ein anderes ist, so schneiden sich die beiden Geraden.

§. 21.

Zweiundzwanzigster Satz. Lehrsatz.

Schlüße von der Lage der Linien auf die Winkelgesetze.

Wenn zwei Parallellinien von einer dritten geschnitten werden, so sind zwei innere entgegengesetzte Winkel zusammen gleich zwei rechten.

Fig. 51. Dat. AB # CD;
Thes. $\angle x + \angle y = 2R$.

Bew. Wäre $\angle x + \angle y < 2R$, so würden sich die Linien auf der Seite BD schneiden (voriger Lehrsatz), was gegen die Daten, daher unmöglich ist, also ist auch unmöglich

$$\angle x + \angle y < 2R.$$

Wäre $\angle x + \angle y > 2R$, so wäre $\angle z + \angle v < 2R$, da sie zusammen als zwei Paar Nebenwinkel gleich 4R sind, also würden sich die Linien auf der Seite AC schneiden, was gegen die Daten, daher unmöglich ist, also ist auch unmöglich

$$\angle x + \angle y > 2R.$$

Da nun $\angle x + \angle y$ weder kleiner noch größer als 2R seyn kann, so ist

$$\angle x + \angle y = 2R. \text{ w. z. b. w.}$$

I. Zusatz. Wenn zwei Parallellinien von einer dritten Geraden durchschnitten werden, so ist:

1) jedes Paar entgegengesetzte Winkel gleich zwei rechten;

2) jedes Paar Wechselwinkel gleich;
3) jedes Paar correspondirende Winkel gleich;
4) jedes Paar innere und äußere Wechselwinkel gleich zwei rechten.

Anmerkung. Aus obigem Datum folgt, daß die Summe zweier innerer entgegengesetzter Winkel zusammen gleich zwei rechten ist, woraus nach früheren Sätzen die aufgestellten vier Thesen hervorgehen.

II. Zusatz. Wenn zwei sich schneidende Gerade von einer dritten durchschnitten werden, so sind obige Winkelgesetze sämmtlich andere.

III. Zusatz. Durch einen Punkt gibt es zu einer Geraden nur eine einzige Parallele.

Fig. 52. Dat. AB $\#$ CD;
Thes. CD ist durch E die einzig mögliche Parallele zu AB.

Bew. Gäbe es durch E noch eine zweite Parallele zu AB, z. B. EG, so wäre

$$\angle FEG = \angle AFE,$$
es ist aber $\angle FED = \angle AFE$

$\angle FEG = \angle FED$, was unmöglich ist, da $\angle FED$ nur ein Theil vom $\angle FEG$ ist, daher ist auch unmöglich EG $\#$ AB. Da dieses von jeder andern Linie gilt, so ist CD durch E die einzige Parallele zu AB. w. z. b. w.

IV. Zusatz. Wenn eine Gerade eine von zwei Parallellinien schneidet, so schneidet sie bei genugsamer Verlängerung auch die andere.

Bew. Würde die schneidende Gerade, die mit der ersten einen Punkt gemein hat, die zweite nicht schneiden, so wäre sie damit parallel, da aber die erste Linie mit der zweiten parallel ist, so hätte man durch einen Punkt zwei Linien, die einer gegebenen parallel wären, was gegen obigen Zusatz, daher unmöglich ist, also ist auch unmöglich, daß die dritte

Linie die zweite nicht schneidet, d. h. sie schneidet auch die zweite. w. z. b. w.

V. Zusatz. Wenn eine Gerade auf einer von zwei Parallellinien senkrecht steht, so steht sie auch senkrecht auf der andern. Fig. 53.

Anmerkung. Da zwei entgegengesetzte Winkel zusammen gleich zwei rechten sind, und einer davon für sich ein rechter ist, so folgt, daß der andere auch ein rechter ist. Eine solche Gerade heißt die Entfernung der beiden Parallellinien.

VI. Zusatz. Wenn von zwei Geraden jede einer dritten parallel ist, so sind die zwei auch unter sich parallel.

Fig. 54. Dat. $\begin{cases} AB \# EF, \\ CD \# EF; \end{cases}$

Thes. $AB \# CD$.

Bew. Da $AB \# EF$ ist, so ist $\angle x = \angle z$, da ferner $CD \# EF$ ist, so ist $\angle y = \angle z$

$\angle x = \angle y$ daraus folgt $AB \# CD$. w. z. b. w.

VII. Zusatz. Zwei Parallellinien sind überall gleich weit von einander entfernt.

Fig. 55. Dat. $\begin{cases} AB \# CD, \\ \angle F = R, \\ \angle H = R; \end{cases}$

Thes. $EF = GH$.

Bew. Zieht man FG, so ist

$FG = FG$

$\angle E = \angle H \; (= R)$

$\angle EGF = \angle HFG$ (Wechselwinkel für parallele Linien). $\triangle EGF \cong \triangle HFG$ und

$EF = GH$. w. z. b. w.

VIII. Zusatz. Wenn die Schenkel zweier Winkel nach

derselben Seite hin einzeln einander parallel sind, so sind die Winkel selbst gleich.

Fig. 56. Dat. $\begin{cases} AB \# DE, \\ BC \# EF; \end{cases}$

Thes. $\angle ABC = \angle DEF.$

Bew. Verlängert man DE bis G, so ist

$$\angle DEE = \angle EGC \ (EF \# BC)$$
$$\angle ABC = \angle EGC \ (AB \# ED).$$

$$\angle ABC = \angle DEF.$$ w. z. b. w.

IX. Zusatz. Wenn zwei Winkel einander gleich und ein Paar ihrer Schenkel parallel sind, so sind auch das andere Paar parallel.

Fig. 56. Dat. $\begin{cases} BC \# EF, \\ \angle B = \angle E; \end{cases}$

Thes. $AB \# ED.$

Bew. Es ist $\angle DEF = \angle EGC$

ferner ist $\angle DEF = \angle ABC$

$$\angle ABC = \angle EGC;$$

daher $AB \# ED.$ w. z. b. w.

Anmerkung. Wenn man ein dreieckiges Lineal so verschiebt, daß eine Seite auf der nämlichen geraden Linie bleibt, so liegen die beiden andern Seiten mit ihrer ersten Lage parallel.

§. 22.

Definition. Ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberstehende Seiten parallel sind, heißt Parallelogramm. Fig. 57. Eigenschaften und Eintheilung der Parallelogramme.

Dreiundzwanzigster Satz. Lehrsatz.

Jedes Parallelogramm wird durch eine Diagonallinie in zwei congruente Dreiecke getheilt.

Fig. 58. Dat. $\begin{cases} AB \# CD, \\ AC \# BD; \end{cases}$

Thes. $\triangle ACD \cong \triangle ABD$.

Bew. Es ist $AD = AD$

$\angle CAD = \angle ADB$

$\angle CDA = \angle DAB$

$\triangle ACD \cong \triangle ABD$. w. z. b. w.

I. Zusatz. In jedem Parallelogramm sind die gegenüberstehenden Seiten einander gleich.

Fig. 58. Dat. $\begin{cases} AC \# BD, \\ AB \# CD; \end{cases}$

Thes. $\begin{cases} CA = BD, \\ AB = CD. \end{cases}$

Bew. Da $\triangle ACD \cong \triangle ABD$ ist, so ist

$AC = BD$

$CD = AB$. w. z. b. w.

II. Zusatz. In jedem Parallelogramme sind die gegenüberstehenden Winkel einander gleich.

Fig. 57. Dat. $\begin{cases} AB \# CD, \\ AC \# BD; \end{cases}$

Thes. $\begin{cases} \angle A = \angle D, \\ \angle B = \angle C. \end{cases}$

Bew. Es ist

$\angle A + \angle C = 2R$	$\angle A + \angle C = 2R$
$\angle A + \angle B = 2R$	$\angle C + \angle D = 2R$
$\angle A + \angle C = \angle A + \angle B$	$\angle A + \angle C = \angle C + \angle D$
$\angle C = \angle B$. w. z. b. w.	$\angle A = \angle D$. w. z. b. w.

III. Zusatz. Wenn in einem Parallelogramm ein Winkel ein rechter ist, so sind alle Winkel rechte.

Vierundzwanzigster Satz. Lehrsatz.

Wenn zwei congruente Dreiecke so neben einander liegen, daß sich zwei gleiche Seiten in umgekehrter Ordnung decken, so bilden sie ein Parallelogramm.

Dat. △ ACD ≌ △ ABD;

Fig. 58. **Thes.** $\begin{cases} AB \# CD, \\ AC \# BD. \end{cases}$

Bew. Es ist AD = DA,
AB = CD,
BD = AC;

△ ABD ≌ △ ACD,
∠ DAB = ∠ ADC, daher AB # CD
∠ CAD = ∠ ADB, daher AC # BD;

d. h. ABCD ein Parallelogramm. w. z. b. w.

I. Zusatz. Wenn in einem Vierecke die gegenüberstehenden Seiten gleich sind, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

Anmerkung. Dieser Zusatz, so wie der dritte werden ganz nach der Art des Lehrsatzes durch die Congruenz der Dreiecke und deren Folgerungen bewiesen.

II. Zusatz. Wenn in einem Vierecke je zwei gegenüberstehende Winkel einander gleich sind, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

Dat. $\begin{cases} \angle A = \angle D, \\ \angle B = \angle C; \end{cases}$

Fig. 57.

Thes. $\begin{cases} AB \# CD, \\ AC \# BD. \end{cases}$

Bew. Es ist $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D = 4R$

$$\angle A = \angle D$$
$$\angle B = \angle C$$

$$\angle A + \angle C + \angle C + \angle A = 4R$$
$$2\angle A + 2\angle C = 4R$$
$\angle A + \angle C = 2R$; daher $AB \# CD$,

und $\angle A + \angle B = 2R$; daher $AC \# BD$,

demnach ist ABCD ein Parallelogramm. w. z. b. w.

III. Zusatz. Wenn in einem Vierecke ein Paar Seiten gleich und parallel sind, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

Fünfundzwanzigster Satz. Lehrsatz.

In jedem Parallelogramm halbiren sich die beiden Diagonallinien.

Fig. 59.

Dat. $\begin{cases} AB \# CD, \\ AC \# BD; \end{cases}$

Thes. $\begin{cases} AE = ED, \\ BE = EC. \end{cases}$

Bew. Es ist in $\triangle$ AEB und $\triangle$ CED

$$AB = CD$$
$$\angle EAB = \angle EDC$$
$$\angle EBA = \angle ECD$$

$$\triangle AEB \cong \triangle CED,$$

und $\left.\begin{matrix} AE = ED \\ BE = EC \end{matrix}\right\}$ w. z. b. w.

Erklärung. Die Parallelogramme werden nach der Gleichheit der Seiten, oder der Gleichheit der Winkel, oder beiden zugleich in folgende Klassen eingetheilt:

1) Rhombus oder Raute heißt ein Parallelogramm, in welchem alle Seiten einander gleich, und die Winkel schief sind (Fig. 60);

2) **Quadrat** heißt jenes Parallelogramm, in welchem alle Seiten gleich und alle Winkel einander gleich, d. h. rechte sind;

3) **Rechteck** nennt man ein Parallelogramm, in welchem alle Winkel rechte, die Seiten aber ungleich sind;

4) **Rhomboid** ist ein Parallelogramm mit ungleichen Seiten und schiefen Winkeln (Fig. 57).

I. **Zusatz.** In jedem Rechtecke sind die beiden Diagonallinien einander gleich.

II. **Zusatz.** In einer Raute stehen die beiden Diagonallinien senkrecht auf einander. (Fig. 62.)

Erklärung. Ein Viereck, in welchem nur zwei Seiten parallel sind, heißt **Trapez**, oder **parallel Trapez** (Fig. 61); ist keine Seite der andern parallel, so heißt das Viereck ein **Trapezoid**.

Sechsundzwanzigster Satz. Lehrsatz.

Verbindet man in einem Trapeze die Mittelpunkte der beiden nicht parallelen Seiten durch eine Gerade, so ist diese Verbindungslinie gleich der halben Summe der parallelen Seiten.

Fig. 63. Dat. $\begin{cases} AB \# CD, \\ AE = EC, \\ BF = FD; \end{cases}$

Thes. $EF = \dfrac{AB + CD}{2}$.

Bew. Zieht man FGH # AC, und verlängert CD bis H, so ist

$\triangle BFG \cong \triangle DHF$, und $BG = DH$.

Nun ist $EF = AG = CH \dfrac{AG + CH}{2}$, oder

$EF = \dfrac{AB - BG + CD + DH}{2} = \dfrac{AB + CD}{2}$ w. z. b. w.

Zweites Buch.

Vom Kreise und dem Maße der Winkel.

---

§. 23.

Erklärungen vom Kreise und den dabei vorkommenden Linien.

I. Der Kreisumfang ist eine krumme Linie, deren sämmtliche Punkte gleich weit von einem und demselben Punkte entfernt sind; sie heißt auch Kreislinie oder Peripherie (Fig. 64). Die von der Peripherie eingeschlossene Fläche heißt Kreis, welche Benennung im gemeinen Leben sehr oft für die Kreislinie gebraucht wird. Der Punkt, von welchem aus die Entfernungen der Peripheriepunkte gleich sind, heißt Mittelpunkt oder das Centrum der Peripherie, oder des Kreises, nemlich M.

II. Jede vom Mittelpunkte nach einem Punkte des Umfanges gezogene gerade Linie heißt Halbmesser oder Radius, wie MA; jede gerade Linie, welche durch den Mittelpunkt geht und die beiden Ende im Umfange hat, heißt Durchmesser, wie AB.

III. Einen Theil des Kreisumfanges nennt man Bogen, die Gerade aber, welche die beiden Enden eines Bogens verbindet, heißt die Sehne dieses Bogens, wie CD; zu jeder Sehne gehören eigentlich zwei Bögen, jedoch ist immer der kleinere gemeint, wenn nicht ausdrücklich das Gegentheil gesagt wird. Geht eine Sehne über die Peripherie des Kreises hinaus, so heißt sie Sekante, wie CE; hat endlich eine Gerade nur einen Punkt mit der Kreisperipherie gemein und liegt sonst ganz außer derselben, so heißt sie Tangente, wie FG; der gemeinschaftliche Punkt heißt alsdann der Berührungspunkt.

IV. Ein Winkel, der seinen Scheitel im Mittelpunkte des Kreises hat, heißt Centriwinkel, wie ∠ CMD in Fig. 65; liegt der Scheitel eines Winkels in der Peripherie und es sind beide Schenkel Sehnen, so heißt der Winkel Peripheriewinkel, eingeschriebener Winkel, wie ∠ CFD; ist aber ein Schenkel eine Tangente, so erhält der Winkel den Namen Tangentialwinkel, wie ∠ DFG. Ein Winkel, dessen Scheitel innerhalb der Peripherie liegt, heißt Sehnenwinkel, wie ∠ AEB; liegt der Scheitel außerhalb der Peripherie und sind beide Schenkel Sekanten, so heißt der Winkel Sekantenwinkel, wie ∠ AHB; sind aber beide Schenkel Tangenten, so heißt er Tangentenwinkel, wie ∠ CID. Die Bögen zwischen den Schenkeln dieser Winkel heißen zugehörige Bögen.

V. Kreisabschnitt oder Segment heißt die Fläche oder der Theil des Kreises, der zwischen einem Bogen und seiner Sehne liegt. Kreisausschnitt oder Sektor heißt die Fläche oder der Theil des Kreises, der zwischen zwei Radien und dem zugehörigen Bogen liegt.

VI. Haben zwei Kreise einen Mittelpunkt (Fig. 66), so heißen sie concentrische; die Fläche zwischen den beiden Peripherien heißt Ring; haben aber zwei Kreise verschiedene

Mittelpunkte, so heißen sie **excentrische** (Fig. 67); die gerade Verbindung der beiden Mittelpunkte heißt **Centrallinie**.

I. **Zusatz.** Zwei Kreise von gleichen Radien sind einander congruent.

Fig. 68. Dat. AB = CD;
Thes. Kr. A ≌ Kr. C.

Bew. Wenn man den Mittelpunkt C auf A, und CD in die Richtung von AB legt, so muß D auf B fallen (AB = CD), ferner muß AF in die Richtung von AE fallen, wenn man ∠ A = ∠ C macht; endlich muß F auf E fallen (CF = AE); da dieses aber von jedem Punkte der Peripherie um C gilt, so decken sich die beiden Kreise vollkommen, und es ist

Kr. A ≌ Kr. C. w. z. b. w.

II. **Zusatz.** Jeder Durchmesser eines Kreises ist gleich zwei Radien.

Anmerkung. Daraus geht auch hervor, daß alle Durchmesser eines Kreises einander gleich sind.

III. **Zusatz.** Jeder Durchmesser theilt den Kreis und seinen Umfang in zwei congruente Theile.

Fig. 69. Dat. CAB ein Durchmesser;
Thes. CDB ≌ CEB.

Bew. Wenn man den obern Theil CEB um CAB dreht, was geschehen kann, da sich zwei Ebenen in einer geraden Linie schneiden, so muß der Punkt E auf einen Punkt des untern Theiles der Peripherie, vielleicht nach D fallen; denn fiele E innerhalb oder außerhalb der Peripherie nieder, so wäre er weniger oder mehr vom Mittelpunkte A entfernt als D, was gegen die Natur des Kreises, daher unmöglich ist, also ist auch unmöglich, daß E innerhalb oder außerhalb der Peripherie fällt, d. h. E fällt auf D; da dieses aber von

allen andern Punkten gilt und die Endpunkte ohnehin auf einander liegen, so ist

CBD ≌ CEB. w. z. b. w.

§. 24.

Erster Satz. Lehrsatz.

Eigenschaften der Sehne.

Eine gerade Linie kann einen Kreisumfang in nicht mehr als zwei Punkten schneiden.

Bew. Schnitten eine Gerade und eine Kreisperipherie sich in drei Punkten, so gäbe es von dem Mittelpunkte auf eine Gerade drei gleiche gerade Linien, weil alle Punkte der Peripherie gleich weit vom Mittelpunkte entfernt sind, was aber gegen einen frühern Satz, daher unmöglich ist, also ist auch unmöglich, daß eine Gerade einen Kreisumfang in drei Punkten schneidet; da man aber durch zwei beliebige Punkte immer eine Gerade ziehen kann, so kann eine Gerade einen Kreisumfang nur in zwei Punkten schneiden. w. z. b. w.

Zweiter Satz. Lehrsatz.

Jede Sehne ist kleiner als ein Durchmesser.

Fig. 70. Dat. { AB eine Sehne, und CD ein Durchmesser;

Thes. AB < CD.

Bew. Zieht man AM und BM, so ist:

AB < AM + BM, oder

AB < CD. w. z. b. w.

Anmerkung. Ein Durchmesser ist daher immer die größt möglichste Sehne.

§. 25.

Dritter Satz. Lehrsatz.

Relationen zwischen Centriwinkel, Bogen und Sehne.

In einem Kreise, oder in zwei Kreisen von gleichen Radien gehören zu gleichen Centriwinkeln auch gleiche Sehnen und gleiche Bögen.

Fig. 71.

Dat. $\begin{cases} AM = NC, \\ \angle M = \angle N; \end{cases}$

Thes. $\begin{cases} AB = CD, \\ \text{Bg.}\, AB = \text{Bg.}\, CD. \end{cases}$

Bew. Wenn man N auf M, und NC in die Richtung von MA legt, so muß C auf A fallen (MA = NC), ferner muß ND in die Richtung von MB ($\angle M = \angle N$), und D auf B fallen (MB = ND), ebenso muß Bogen CD in die Richtung von Bg. AB fallen (Kr. M $\cong$ Kr. N), daher decken sich die Sehnen und Bögen, weil ihre Richtungen und ihre Endpunkte auf einander liegen, und es ist

$$\left. \begin{array}{c} AB = CD, \\ \text{Bg.}\, AB = \text{Bg.}\, CD. \end{array} \right\} \text{w. z. b. w.}$$

Zusatz. Zum größern Centriwinkel gehört auch der größere Bogen und die größere Sehne.

Dat. $\angle AMB > \angle CMD;$

Fig. 72.

Thes. $\begin{cases} \text{Bg}\, AB > \text{Bg.}\, CD, \\ AB > CD. \end{cases}$

Bew. Legt man MC in die Richtung von MA, so muß C auf A fallen (MA = MC), ferner muß, wenn man die Dreiecke auf einander legt, MD zwischen MA und MB fallen ($\angle AMB > \angle CMD$), und jeder Punkt des Bogens CD muß auf einen Punkt von Bogen AB, d. h. Bogen CD muß in die Richtung von Bogen AB fallen (alle

Punkte gleich weit vom Mittelpunkte entfernt), daher erscheint Bogen CD als Theil von Bogen AB, oder

$$\left.\begin{array}{r}\text{Bg. } AB > \text{Bg. } CD, \\ \text{ferner ist } AB > CD\end{array}\right\}\text{ w. z. b. w.}$$

Vierter Satz. Lehrsatz.

In einem Kreise, oder in zwei Kreisen von gleichen Radien gehören zu gleichen Bögen auch gleiche Sehnen und gleiche Centriwinkel.

Fig. 71. Dat. $\left\{\begin{array}{l} MA = NC, \\ \text{Bg. } AB = \text{Bg. } CD; \end{array}\right.$

Thes. $\left\{\begin{array}{l} AB = CD, \\ \angle M = \angle N. \end{array}\right.$

Bew. Wenn man N auf M, und NC in die Richtung von MA legt, so muß C auf A (MA = NC), Bg. CD in die Richtung von Bg. AB (Kr. M $\cong$ Kr. N), und D auf B fallen (Bg. AB = Bg. CD); es kommen daher die Endpunkte der Sehnen, und die Schenkel der Winkel auf einander zu liegen, und es ist

$$\left.\begin{array}{r} AB = CD, \\ \angle M = \angle N. \end{array}\right\}\text{ w. z. b. w.}$$

Zusatz. Zum größern Bogen gehört auch die größere Sehne und der größere Winkel.

Fig. 72. Dat. Bg. AB > Bg. CD;

Thes. $\left\{\begin{array}{l} AB > CD, \\ \angle AMB > \angle CMD. \end{array}\right.$

Bew. Wenn man MC in die Richtung von MA legt, so muß C auf A fallen (MC = MA), ferner muß Bogen CD in die Richtung von Bogen AB fallen, weil alle Punkte gleich weit vom Mittelpunkte entfernt sind, und D muß inner-

halb B fallen (Bg. AB > Bg. CD), daher fällt auch MD zwischen MA und MB, und es ist:

$$\left.\begin{array}{r}\angle AMB > \angle CMD, \\ \text{und daraus } AB > CD.\end{array}\right\} \text{w. z. b. w.}$$

Fünfter Satz. Lehrsatz.

In einem Kreise oder in zwei Kreisen von gleichen Radien gehören zu gleichen Sehnen auch gleiche Centriwinkel, und gleiche Bögen.

Fig. 71.

$$\text{Dat.} \left\{\begin{array}{l} MA = NC, \\ AB = CD; \end{array}\right.$$

$$\text{Thes.} \left\{\begin{array}{l} \angle M = \angle N, \\ \text{Bg. } AB = \text{Bg. } CD. \end{array}\right.$$

Bew. Erstens sind die Winkel einander gleich, weil die Dreiecke congruent sind (erster Congruenzfall), und daraus folgt nach drittem Lehrsatz die Gleichheit der Bögen; wir haben daher

$$\left.\begin{array}{r}\angle M = \angle N, \\ \text{Bg. } AB = \text{Bg. } CD.\end{array}\right\} \text{w. z. b. w.}$$

Zusatz. Zur größern Sehne gehört auch der größere Winkel und der größere Bogen.

Fig. 72.

$$\text{Dat.} \quad AB > CD;$$

$$\text{Thes.} \left\{\begin{array}{l} \angle AMB > \angle CMD, \\ \text{Bg. } AB > \text{Bg. } CD. \end{array}\right.$$

Bew. Die Sehnen, und die Radien ihrer Endpunkte bilden Dreiecke, in denen gegenseitig zwei Seiten einander gleich, die dritten aber ungleich sind, daher sind die den letztern Seiten gegenüberstehenden Winkel in derselben Ordnung ungleich, woraus auch die Ungleichheit der Bögen folgt; wir haben daher

$\angle$ AMB $>$ $\angle$ CMD,
Bg. AB $>$ Bg. CD. } w. z. b. w.

Anmerkung. Man sieht leicht von selbst ein, daß bei den Daten der vorhergehenden Sätze auch die Sectorn und Segmente gleich sind.

§. 26.

Sechster Satz. Lehrsatz.

Wenn man den Mittelpunkt eines Kreises mit dem Mittelpunkte einer Sehne verbindet, so halbirt die Verbindungslinie den Winkel und den Bogen. Die Sehne und ihre Entfernung vom Mittelpunkte

Dat. AC = CB;

Fig. 73. Thes. { $\angle$ AMC = $\angle$ BMC,
Bg. AD = Bg. BD.

Bew. Es ist in $\triangle$ AMC u. $\triangle$ BMC
AM = BM,
MC = MC,
AC = BC;

$\triangle$ AMC $\cong$ $\triangle$ BMC
$\angle$ AMC = $\angle$ BMC,
und daraus Bg. AD = Bg. BD. } w. z. b. w.

Anmerkung. In diesem Satze ist folgender enthalten: Die drei Mittelpunkte, der des Kreises, der einer Sehne und der ihres Bogens liegen auf einer einzigen Geraden; wenn man daher je zwei dieser Punkte durch gerade Linien verbindet, so bilden sie immer ein und dieselbe Linie; da ferner nur eine einzige Linie den Winkel halbirt, und nur eine einzige durch den Mittelpunkt der Sehne auf dieser senkrecht steht, so werden von jeder Linie auch diese zwei Bedingungen erfüllt, woraus die Richtigkeit der nächsten vier Zusätze folgt.

I. Zusatz. Wenn man den Mittelpunkt eines Kreises

mit dem Mittelpunkte eines Bogens verbindet, so halbirt die Verbindungslinie den Winkel und die Sehne, und steht auf dieser senkrecht.

II. Zusatz. Wenn man die Mittelpunkte einer Sehne und ihres Bogens durch eine Gerade verbindet, so steht diese auf der Sehne senkrecht, geht durch den Mittelpunkt des Kreises, und halbirt den Centriwinkel.

III. Zusatz. Wenn man vom Mittelpunkte eines Kreises ein Perpendikel auf eine Sehne zieht, so wird Sehne, Bogen und Winkel halbirt.

IV. Zusatz. Wenn man eine Sehne durch eine Gerade senkrecht halbirt, so geht die Halbirungslinie durch den Mittelpunkt des Kreises, und halbirt den Centriwinkel.

V. Zusatz. Von zwei Sekanten, von denen eine durch den Mittelpunkt geht, ist diese die größere, von ihrem gemeinschaftlichen Punkte aus gerechnet.

Fig. 74. Thes. $AC > EC$.

Bew. Zieht man MF senkrecht auf ED, so ist $EF = DF$ (III. Zusatz), ferner wird MCF ein rechtwinkliges Dreieck, daher

$$\begin{array}{l} MC > FC; \text{ es ist aber} \\ AM > EF, \\ \hline AC > EC. \text{ w. z. b. w.} \end{array}$$

Siebenter Satz. Lehrsatz.

Die auf dem Halbmesser eines Kreises, und zwar durch den Endpunkt, errichtete Senkrechte ist eine Tangente des Kreisumfanges.

Fig. 75. Dat. $\angle MAB = R$;
Thes. AB eine Tangente.

Bew. Erstens ist A ein Punkt der Geraden und der

Peripherie zugleich, zweitens liegt jeder andere Punkt der Geraden außerhalb der Peripherie; denn zieht man MC, so ist AMC ein rechtwinkliges Dreieck, wovon MC die Hypotenuse, daher die größte Seite ist, d. h.

$$MC > MA$$

oder C liegt außerhalb der Peripherie. Da nun dieses von jedem andern Punkte gilt, so ist AB eine Tangente. w. z. b. w.

Achter Satz. Lehrsatz.

Eine Tangente an einen Kreisumfang steht auf dem Radius durch den Berührungspunkt senkrecht.

Fig. 75. Dat. AB eine Tangente;
Thes. $\angle MAB = R$.

Bew. Verbindet man einen beliebigen Punkt von AB, z. B. C mit M, so ist nach der Natur der Tangente

$$MC > MA.$$

Da dieses aber von jedem andern Punkte der Geraden AB gilt, so ist MA die Entfernung derselben von M, d. h.

$$\angle MAB = R. \text{ w. z. b. w.}$$

Anmerkung. Diese beiden Lehrsätze lassen sich als besondere Fälle der vorigen, daher auch als Zusätze zu diesen betrachten.

I. Zusatz. Durch einen Punkt in der Peripherie eines Kreises gibt es nur eine Tangente an dieselbe.

Bew. Da die Tangente durch den Endpunkt des Radius senkrecht auf diesem steht, und es nur eine solche Senkrechte gibt, so gibt es auch nur eine Tangente. w. z. b. w.

II. Zusatz. Die zwischen zwei parallelen Sehnen oder Tangenten liegenden Bögen eines Kreisumfanges sind einander gleich.

Fig. 76. Dat. AB # CD;
Thes. Bg. AC = Bg. BD.

Bew. Zieht man ME senkrecht auf AB und verlängert sie, so steht sie auch senkrecht auf CD, und halbirt die beiden Bögen AB und CD, daher ist

Bg. AG = Bg. BG,
Bg. CG = Bg. DG, durch Subtraktion

Bg. AC = Bg. BD. w. z. bew. w.

§ 27.

Neunter Satz. Lehrsatz.

Beziehungen zweier Sehnen und ihrer Entfernungen.

In einem Kreise, oder in zwei Kreisen von gleichen Radien sind gleiche Sehnen gleichweit vom Mittelpunkte entfernt.

Fig. 77. Dat. $\begin{cases} AB = CD, \\ \angle MEB = R, \\ \angle MFD = R; \end{cases}$

Thes. ME = MF.

Bew. Zieht man MB und MD, so ist in

△ MEB und △ MFD
MB = MD
BE = DF (6ter Satz. III. Zus.)
∠ MEB = ∠ MFD (= R)

△ MEB ≌ △ MFD
ME = MF. w. z. b. w.

Zusatz. Von zwei ungleichen Sehnen ist die größere dem Mittelpunkte näher.

Fig. 78. Dat. $\begin{cases} AB < CD, \\ \angle MEB = R, \\ \angle MFD = R; \end{cases}$

Thes. ME < MF.

Bew. Macht man AG = CD, und zieht MH senkrecht auf AG, so ist MH = MF (voriger Satz); zieht man nun HE, so ist △ MEH bei E stumpfwinklig, weil der kleinern Sehne der kleinere Bogen angehört, daher MH die größte Seite, d. h.

MH > ME, oder
ME < MF. w. z. b. w.

Zehnter Satz. Lehrsatz.

Wenn in einem Kreise, oder in zwei Kreisen von gleichen Radien zwei Sehnen gleichweit vom Mittelpunkte entfernt sind, so sind sie selbst gleich lang.

Fig. 77. Dat. { ∠ MEB = ∠ MFD = R,
ME = MF;

Thes. AB = CD.

Bew. Zieht man MB und MD, so ist in
△ MEB und △ MFD
ME = MF,
∠ MEB = ∠ MFD (= R)
MB = MD

△ MEB ≌ △ MFD
MB = FD.

Da aber diese die halben Sehnen sind, so ist auch
AB = CD. w. z. b. w.

Zusatz. Wenn zwei Sehnen ungleich weit vom Mittelpunkte entfernt sind, so ist die die größere, die dem Mittelpunkte näher liegt.

Fig. 78. Dat. { ∠ MEB = ∠ MFD,
ME < MF;

Thes. AB > CD.

Bew. Macht man AG = CD, und zieht MH senkrecht auf AG, so ist MH = MF und AH = CF; zieht man nun HE, so ist △ AEH bei H stumpfwinklig, weil dem kleineren Bogen die kleinere Sehne angehört, daher AE die größte Seite, d. h.

$$AE > AH \text{ oder}$$
$$AE > CF;$$

Da aber diese die halben Sehnen sind, so ist auch

$$AB > CD. \text{ w. b. w.}$$

§. 28.

Eilfter Satz. Lehrsatz.

Eigenschaften und Lage zweier excentrischer Kreise.

Zwei excentrische Kreise können sich nur in zwei Punkten schneiden.

Bew. Denkt man sich einen Durchschnitt mit den Enden der Centrallinie verbunden, so entsteht ein Dreieck, welches die Centrallinie zur Basis und die beiden Radien zu Seiten hat. Nach einem frühern Satz gibt es aber auf der einen Seite der Grundlinie nur ein solches Dreieck, daher auch auf einer Seite der Centrallinie nur einen Durchschnitt der beiden Peripherien; da aber durch die Centrallinie die beiden Kreise in congruente Theile getheilt werden, so findet auch unter der Centrallinie ein Durchschnitt, und zwar nur einer statt; d. h. zwei Kreisperipherien können sich nur in zwei Punkten schneiden. w. z. b. w. Fig. 79.

I. Zusatz. Durch drei Punkte ist die Lage und Größe eines Kreises bestimmt; oder durch drei Punkte ist nur ein einziger Kreis möglich.

Bew. Erstens sieht man leicht ein, daß durch weniger als drei, z. B. zwei Punkte die Lage und Größe eines Kreises nicht bestimmt, denn jeder Punkt der Senkrechten

durch die Mitte der Verbindung der beiden Punkte ist von diesen gleich weit entfernt, und kann daher als Mittelpunkt eines Kreises betrachtet werden, der durch die gegebenen Punkte geht. Zweitens, wäre aber durch drei Punkte ein Kreis nicht bestimmt, d. h. gäbe es durch drei Punkte noch zwei verschiedene Kreise, so würden sich zwei Kreise in drei Punkten schneiden, was gegen obigen Satz, daher unmöglich ist, also ist auch unmöglich, daß durch drei Punkte zwei verschiedene Kreisumfänge gehen.

Da nun zwei Punkte zur Bestimmung des Kreises nicht hinreichen, durch drei Punkte aber nur ein einziger Kreis möglich ist, so ist durch drei Punkte die Lage eines Kreises bestimmt. w. z. b. w.

II. Zusatz. Die gemeinschaftliche Sehne zweier sich schneidender Kreise steht auf der Centrallinie senkrecht und wird von dieser halbirt.

Fig. 80. Thes. $\begin{cases} \angle ACN = R, \\ AC = BC. \end{cases}$

Bew. Denkt man den obern Theil der Figur um MN gedreht, so muß A auf B fallen, weil die beiden Theile congruent sind, und nur die beiden Durchschnitte A und B möglich sind, daher ist

$$\angle ACN = \angle BCN \text{ d. h.}$$

$$\left.\begin{array}{l} \angle ACN = R, \\ \text{und } AC = BC. \end{array}\right\} \text{w. z. b. w.}$$

Zwölfter Satz. Lehrsatz.

Zwei excentrische außer einander liegende Kreise kommen sich in jenen zwei Punkten am nächsten, wo die Peripherien von der Centrallinie durchschnitten werden.

Fig. 81. Thes. $AB < CD$.

Bew. Zieht man MC und ND, so ist

$$MN < MC + CD + DN \text{ oder}$$

$$MA + AB + NB < MC + CD + DN;$$

da sich nun MA und MC, NB und ND auf beiden Seiten aufheben, so ist

$$AB < CD. \text{ w. z. b. w.}$$

Anmerkung. Da die beiden Radien und die genannte kürzeste Entfernung auf der Centrallinie liegen, so liegen die beiden Kreise in ihren nächsten Punkten so weit von einander, um wie viel die Centrallinie größer ist als die Summe der beiden Radien; sie berühren sich aber auf der Außenseite, wenn ihre nächste Entfernung gleich Null, d. h. die Centrallinie gleich der Summe der beiden Radien ist. Beides gilt auch umgekehrt.

Dreizehnter Satz. Lehrsatz.

Zwei excentrische ganz in einander liegende Peripherien kommen sich in jenen zwei Punkten am nächsten, wo sie vom größern Radius durchschnitten werden.

Fig. 82. Thes. AB < CD.

Bew. Zieht man CM und DM; so ist

$$AB + BM = AM = CM$$

$$CD + DM > CM$$

$$\overline{AB + BM < CD + DM}$$

$$BM > DM$$

$$\overline{AB < CD. \text{ w. z. b. w.}}$$

Anmerkung. Da die Centrallinie, der kleinere Radius und die genannte kürzeste Entfernung auf dem größern liegen, so sind die beiden Kreise in ihren nächsten Punkten so weit von einander entfernt, um wie viel der größere Radius größer ist als die Summe aus der Centrallinie und dem kleinern Radius; ist der größere Radius gleich dieser Summe, so ist die genannte Entfernung gleich Null, d. h die Kreise berühren sich auf der inneren Seite. Beide Behauptungen sind auch umgekehrt wahr.

Vierzehnter Satz. Lehrsatz.

Zwei excentrische Kreise schneiden sich, wenn von den drei Größen, der Centrallinie und den zwei Radien, je zwei zusammen größer sind, als die dritte.

Dat. $\begin{cases} MN < MA + NB \\ MA < MN + RB \\ NB < MN + MA; \end{cases}$

Fig. 83.

Thes. Die Kreise müssen sich schneiden.

Bew. Da $MN < MA + NB$ ist, so ist

$MN - NB < MA$ oder

$NB < MA$, d. h. B liegt innerhalb der Peripherie um M.

Verlängert man nun MN bis an die Peripherie nach C, so ist $NC = NB$; nun ist

$MN + NB > MA$ oder

$MN + NC > MA$ oder

$MC > MA$; d. h. C liegt außerhalb der Peripherie um M.

Da nun die Peripherie um N durch einen Punkt innerhalb der Peripherie um M, und durch einen Punkt außerhalb derselben geht, so schneiden sich die beiden Kreise. w. z. b. w.

§. 29.

Fünfzehnter Satz. Lehrsatz.

In einem Kreise, oder in zwei Kreisen von gleichen Radien verhalten sich zwei Centriwinkel wie ihre Bögen. Maß des Winkels durch den Bogen.

Dat. AM = CN;

Fig. 84 u. 85. Thes. $\angle$AMB : $\angle$CND = Bg. AB : Bg. CD.

Bew. Der Beweis dieses Satzes zerfällt in zwei, je nachdem die beiden Bögen meßbar oder unmeßbar sind.

A. Sind die beiden Bögen AB und CD in Fig. 84. meßbar, so theile man sie in lauter gleiche Theile, wodurch man das Verhältniß derselben findet, z. B. 5 : 3, oder m : n; verbindet man nun sämmtliche Theilungspunkte mit den Mittelpunkten, so werden die beiden Winkel in ebensoviele und zwar unter sich gleiche Theile getheilt (früherer Satz), woraus hervorgeht, daß das Verhältniß der beiden Winkel dasselbe ist, nämlich 5 : 3 oder m : n; vergleicht man nun folgende zwei Proportionen:

Bg. AB : Bg. CD = 5 : 3 oder m : n,

$\angle$ AMB : $\angle$ CND = 5 : 3 oder m : n; so folgt

$\angle$ AMB : $\angle$ CND = Bg. AB : Bg. CD. w. z. b. w.

B. Sind die beiden Bögen AB und CD in Fig. 85. unmeßbar, so ist dennoch

$\angle$ AMB : $\angle$ CND = Bg. AB : Bg. CD;

denn wäre diese Proportion nicht wahr, so wäre

$\angle$ AMB : $\angle$ CND = Bg. AB : Bg. CE;

würde man nun Bg. AB in lauter gleiche Theile eintheilen, wovon jeder kleiner wäre als ED, d. h. die Differenz zwischen CD und CE, und würde CD mit einem solchen Theil messen, so müßte wenigstens ein Theilungspunkt zwischen E und D z. B. nach F kommen, zieht man nun NF; so wäre

$\angle$ AMB : $\angle$ CNF = Bg. AB : Bg. CF,

$\angle$ AMB : $\angle$ CND = Bg. AB : Bg. CE,

$\angle$ CNF : $\angle$ CND = Bg. CF : Bg. CE, was unmöglich ist, da das eine Verhältniß einen ächten, das andere einen unächten Bruch vorstellt, also ist auch unmöglich

$\angle$ AMB : $\angle$ CND = Bg. AB : Bg. CE.

Da dieses aber von jedem von CD verschiedenen Bogen gilt, so ist

$\angle$ AMB: $\angle$ CND = Bg. AB: Bg. CD w. z. b. w.

I. Zusatz. Für einen und denselben Winkel verhalten sich zwei Bögen von verschiedenen Radien wie die Peripherien.

Fig. 86. Dat. $\angle$ AMB = $\angle$ amb;
Thes. Bg. AB : Bg. ab = Pr. : pr.

Bew. Macht man ab = bc = ed = de, so ist ea = $\frac{1}{n}$ ab, vorausgesetzt, daß $\angle$ ema = $\frac{1}{n}$ $\angle$ amb ist. Macht man ferner AB = BC = CD = DE, so ist EA = $\frac{1}{n}$ AB ($\angle$ EMA = $\frac{1}{n}$ $\angle$ AMB). Nun ist:

AB : ab = BC : bc,
AB : ab = CD : cd,
AB : ab = DE : de,
AB : ab = EA : ea,
AB : ab = AB : ab;

Bg. AB : Bg. ab = Pr. : pr. oder

$$\frac{\text{Bg. AB}}{\text{Pr.}} = \frac{\text{Bg. ab}}{\text{pr.}}$$

II. Zusatz. Zwei Winkel verhalten sich bei verschiedenen Radien zu einander, wie die Quotienten aus ihren Bögen dividirt durch die Peripherien.

Fig. 87. Thes. $\angle$ AMB : $\angle$ CND = $\frac{\text{Bg. AB}}{\text{Pr.}} : \frac{\text{Bg. CD}}{\text{pr.}}$.

Bew. Beschreibt man aus N mit AM den Bogen EF, so ist

$\angle$ AMB : $\angle$ CND = Bg. AB : Bg. EF,

oder $\angle$ AMB : $\angle$ CND = $\frac{\text{Bg. AB}}{\text{Pr.}} : \frac{\text{Bg. EF}}{\text{Pr.}}$;

nun ist $\frac{\text{Bg. EF}}{\text{Pr.}} = \frac{\text{Bg. CD}}{\text{pr.}}$,

daher $\angle$ AMN : $\angle$ CND = $\frac{\text{Bg. AB}}{\text{Pr.}} : \frac{\text{Bg. CD}}{\text{pr.}}$.

w. z. b. w.

III. Zusatz. Jeder Winkel hat jene Zahl zum Maße, die angibt, der wie vielte Theil irgend ein zugehöriger Bogen von seinem Kreise ist.

Fig. 87. Thes. $\angle AMB = \frac{Bg.\ AB}{Pr.}$.

Bew. Setzt man in der vorigen Proportion $\angle CND = 4R$, so ist $\frac{Bg.\ AB}{Pr.} = 1$, daher hat man

$$\angle AMB : 4\ R = \frac{Bg.\ AB}{Pr.} : 1$$

$$\angle AMB = \frac{Bg.\ AB}{Pr.}\ 4\ R.$$

Da aber jeder Winkel durch eine theilweise Umdrehung entsteht, und 4 R eine ganze Umdrehung ausmachen, so ist jeder Winkel der so vielte Theil einer Umdrehung, als ein Bogen dividirt durch seine Peripherie angibt, d. h.

$$\angle AMB = \frac{Bg.\ AB}{Pr.}.\ \text{w. z. b. w.}$$

Anmerkung. Da aber auf diese Weise sämmtliche Winkel durch Brüche dargestellt erscheinen würden, so theilt man jeden Kreis in 360 gleiche Theile, nennt einen solchen Theil Grad, und bezeichnet diese Benennung durch 0, welches Zeichen oberhalb der Zahl rechts geschrieben wird. Jeden Grad theilt man wieder in 60 gleiche Theile, nennt einen solchen Theil Minute, und bezeichnet sie auf obige Weise durch ein Koma, den sechzigsten Theil einer Minute nennt man eine Sekunde, die man durch zwei Koma bezeichnet. Einen so eingetheilten Halbkreis mit Durchmesser und Mittelpunkt versehen nennt man Transporteur, wie Fig. 88. Hier ist also der 360ste Theil einer Umdrehung als Einheit angenommen, und die Größe des Radius bleibt ganz ausser Acht, weil sich darnach die Größe des Bogens der Einheit richtet. In dieser Beziehung sagt man, ein Winkel sey gleich irgend einem seiner Bögen.

Sechzehnter Satz. Lehrsatz.

Jeder Peripheriewinkel hat zum Maße die Hälfte seines Bogens.

Fig. 89. Thes. $\angle ACB = \frac{Bg.\ AB}{2}$.

Bew. In Bezug auf die Lage des Mittelpunktes zu den beiden Schenkeln des Winkels, worauf im Beweise Rücksicht genommen wird, ergeben sich drei Fälle; entweder liegt der Mittelpunkt

1) in einem Schenkel;
2) zwischen den beiden Schenkeln;
3) außerhalb der Schenkel.

I. Zieht man in Fig. 89 a. die Linie BM, so ist

$$\angle z = \angle y + \angle x, \text{ oder}$$
$$\angle z = 2 \angle x \ (\angle x = \angle y)$$
$$\frac{\angle z}{2} = \angle x, \text{ oder}$$
$$\angle ACB = \frac{Bg.\ AB}{2}. \text{ w. z. b. w.}$$

II. Zieht man in Fig. 89 b. die Gerade CME, so ist

$$\angle ACE = \frac{Bg.\ AE}{2}$$
$$\angle BCE = \frac{Bg.\ BE}{2}$$
$$\overline{\angle ACB = \frac{Bg.\ AB}{2}}. \text{ w. z. b. w.}$$

III. Zieht man in Fig. 89 c. die Gerade CME, so ist

$$\angle ECB = \frac{\text{Bg. } EB}{2},$$

$$\angle ECA = \frac{\text{Bg. } EA}{2};$$

$$\angle ACB = \frac{\text{Bg. } AB}{2}. \text{ w. z. b. w.}$$

I. Zusatz. Jeder Tangentialwinkel ist gleich der Hälfte des zwischenliegenden Bogens.

Dat. $\angle MCB = R$;

Fig. 90. Thes. $\angle ACB = \frac{\text{Bg. } AC}{2}$.

Bew. Es ist $\angle MCB = R$, daher, wenn man CM bis D verlängert $\angle MCB = \frac{\text{Bg. } CAD}{2}$;

ferner $\angle DCA = \frac{\text{Bg. } DA}{2}$

$$\angle ACB = \frac{\text{Bg. } AC}{2}. \text{ w. z. b. w.}$$

Anmerkung. Diesen Zusatz kann man auch als speziellen Fall des Lehrsatzes betrachten.

II. Zusatz. Jeder Sehnenwinkel ist gleich der halben Summe der beiden Scheitelbögen.

Fig. 91. Thes. $\angle ACB = \frac{\text{Bg. } AB + \text{Bg. } ED}{2}$

Bew. Zieht man DB, so ist:

$$\angle x = \angle y + \angle z, \text{ oder}$$

$$\angle ACB = \frac{\text{Bg. } AB + \text{Bg. } ED}{2} \text{ w. z. b. w.}$$

III. Zusatz. Jeder Sekantenwinkel ist gleich der halben Differenz der beiden zwischenliegenden Bögen.

Fig. 92. Thes. $\angle ACB = \frac{\text{Bg. } AB - \text{Bg. } DE}{2}$.

Bew. Zieht man DB, so ist:

$\angle x = \angle y + \angle z$, oder

$\angle y = \angle x - \angle z$, oder

$\angle ACB = \frac{\text{Bg. } AB - \text{Bg. } DE}{2}$. w. z. b. w.

Aufgaben

zum

ersten und zweiten Buche.

---

§. 30.

Erste Aufgabe.

Ueber die gerade Linie.

Eine begrenzte gerade Linie in beliebig viele gleiche Theile zu theilen, z. B. in fünf.

Auflösung. Man zieht durch einen Endpunkt der gegebenen Linie eine unbestimmte Gerade, trägt eine beliebige Zirkelöffnung so oft darauf hin, als Theile verlangt sind, verbindet den letzten so erhaltenen Punkt mit dem andern Endpunkte der Geraden, und zieht durch die erhaltenen Punkte Parallellinien zur genannten, so erhält man die verlangten gleichen Theile der gegebenen Geraden.

Man ziehe nämlich in Fig. 93 AC, mache
AD = DE = EF = FG = GH, ziehe BH, und
BH # GI # FK # FL # DM, so ist
AM = ML = LK = KI = IB = $\frac{1}{5}$ AB.

Bew. Zieht man MO # LP # KQ, so ist

$$\text{in } \triangle AMD \text{ u. } \triangle MLO$$
$$AD = MO \ (= DE)$$
$$\angle MAD = \angle LMO$$
$$\angle DMA = \angle OLM$$

$$\triangle AMD \cong \triangle MLO,$$
$$\text{und } AM = ML.$$

Dasselbe gilt von den andern Dreiecken, daher ist
$$AM = ML = LK = KI = IB.$$

Anmerkung. Ist eine geradlinige Richtung eines festen Körpers in mehrere gleiche Theile getheilt, so heißt der Körper ein Maßstab; ein solcher Theil heißt dessen Maßeinheit.

Zweite Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie für eine gegebene Einheit zu messen.

Auflösung. Man bringe den Maßstab mit einem Ende auf einen Endpunkt der Geraden oder umgekehrt, lege die beiden Linien in eine Richtung, so sieht man die Lage des andern Endpunktes der Geraden, daher auch die Menge der Einheiten der Geraden.

Dritte Aufgabe.

Eine gerade Linie von gegebener Länge für eine bekannte Maßeinheit herzustellen.

Auflösung. Man bringe die beiden Zirkelspitzen in die Ende des gegebenen Maßes, und trage diese Zirkelöffnung auf eine unbestimmte Gerade.

Vierte Aufgabe.

Zwei gerade Linien zu addiren und zu subtrahiren.

Auflösung. Man trage die beiden gegebenen Geraden mit dem Zirkel auf eine unbestimmte Gerade entweder aneinander, oder von einem Punkte aus aufeinander, so erhält man im ersten Falle eine Gerade gleich der Summe der beiden gegebenen Geraden, im zweiten Falle eine Gerade, die die Differenz der beiden ausdrückt.

Fünfte Aufgabe.

Das gemeinschaftliche Maß zweier gegebener gerader Linien zu finden, wenn es ein solches gibt.

Auflösung. Man trage in Fig. 94 CD auf AB, so oft es angeht, z. B. zweimal, und es bleibe der Rest BE; man trage den Rest BE auf die Linie CD, so oft es angeht, z. B. einmal, und es bleibe der Rest DF; man trage den zweiten Rest DF auf den ersten BE, so oft es angeht, z. B. einmal, und es bleibe der Rest BG; man trage den dritten Rest BG auf den zweiten DF, so oft er darin enthalten ist; so fahre man fort, bis man auf einen Rest kommt, welcher in den vorigen gerade aufgeht, alsdann ist dieser letzte Rest das gemeinschaftliche Maß der gegebenen Linie, und man findet, wenn man ihn zur Einheit annimmt, leicht den Werth der vorhergehenden Reste, also zuletzt den Werth der beiden gegebenen Linien, woraus sich ihr Verhältniß in Zahlen berechnen läßt.

Anmerkung. Das Verfahren ist das nämliche, welches die Arithmetik lehrt, um den gemeinschaftlichen Divisor zweier Zahlen zu finden; dasselbe bedarf also keines besondern Beweises.

Es kann kommen, daß man nie einen Rest findet, welcher in dem ihm vorhergehenden gerade aufgeht, so weit man auch das Verfahren fortsetzen mag. Alsdann haben die beiden Linien kein gemeinschaftliches Maß, und sind, was man nennt, incommensurabel (irrational). Man wird ein Beispiel davon weiter unten, bei dem Verhältniß der Diagonale zur Seite des Quadrates, sehen. In diesem Falle also ist

das Verhältniß in Zahlen nicht zu finden: läßt man aber den letzten Rest weg, so wird man ein mehr oder weniger sich näherndes Verhältniß erhalten, je nachdem man die Operation mehr oder weniger weit fortgesetzt hat.

§. 31.

Sechste Aufgabe.

Eine gerade Linie senkrecht zu halbiren. Ueber die Senkrechte.

Auflösung. Man beschreibt über die gegebene Gerade eine Raute, wovon sie eine Diagonallinie ist, oder zwei gleichschenklige Dreiecke, wovon sie die Basis ist, und verbindet die Ecken.

Setzt man nämlich in Fig. 95 in A und B die Zirkelspitze ein, und beschreibt Bögen mit gleichen Radien, so schneiden sich diese in C und D, zieht man alsdann CD, so ist

$$\left.\begin{array}{r} AE = BE, \\ \text{und } \angle\, AEC = \angle\, BEC. \end{array}\right\} \text{(ABCD eine Raute).}$$

Siebente Aufgabe.

Durch einen in einer Geraden liegenden Punkt auf diese eine Senkrechte zu errichten.

Auflösung. Man schneide vom gegebenen Punkte aus zwei gleiche Stücke ab, beschreibe aus den erhaltenen Punkten mit gleichen Radien Bögen, und ziehe ihre gemeinschaftliche Sehne. Fig. 96.

Zusatz. Durch einen Endpunkt einer Geraden auf diese eine Senkrechte zu errichten.

Auflösung. Man beschreibe in Fig. 97 aus A und C, den Enden eines beliebigen Stückes der Geraden, mit gleichen Radien zwei Bögen, die sich in D schneiden, ziehe CD, und verlängere es bis E, so daß DE = DC wird; zieht man nun EA, so ist diese die verlangte Senkrechte, nämlich es ist

$$\angle\, EAB = R.$$

Bew. Es ist $\angle x + \angle y + \angle z + \angle v = 2R$

$$\angle x = \angle y$$
$$\angle z = \angle v$$

$$2\angle y + 2\angle z = 2R, \text{ oder}$$
$$\angle y + \angle z = R, \text{ oder}$$
$$\angle EAB = R.$$

Achte Aufgabe.

Von einem Punkte außerhalb einer Geraden auf diese ein Perpendikel zu fällen.

Auflösung. Man beschreibe aus dem gegebenen Punkte einen Bogen, der die Gerade in zwei Punkten schneidet; aus diesen beschreibe man mit gleichen Radien Bögen, deren Durchschnitt man mit dem gegebenen Punkt verbindet. Diese Verbindungslinie steht auf der gegebenen senkrecht (15ter Lehrsatz, I. Buch).

§. 32.

Neunte Aufgabe.

Ueber den Winkel.

Einen Winkel zu zeichnen, der einem gegebenen gleich ist.

Auflösung. Man beschreibe in Fig. 98 aus D u. B mit gleichen Radien Bögen, mache Bg. EF = Bg. CG, indem man gleiche Sehnen aufträgt und ziehe DF, so ist

$$\angle ABC = \angle FDE.$$

(Zu gleichen Bögen gehören gleiche Centriwinkel.)

Zehnte Aufgabe.

Einen gegebenen Winkel zu halbiren.

Auflösung. Man beschreibe in Fig. 99 aus B den Bogen

DE, ferner aus D und E mit gleichen Radien Bögen, die sich in F schneiden, ziehe BF, so halbirt diese den Winkel B (die Senkrechte vom Mittelpunkte auf die Sehne halbirt den Centriwinkel), daher ist

$$\angle ABF = < CBF.$$

Anmerkung. An diese Aufgabe würde sich die anreihen, einen Winkel in beliebig viele gleiche Theile zu theilen. Allein man hat noch nicht gefunden, wie man mit Zirkel und Lineal zur Lösung dieser Aufgabe gelangen könnte, und man wird auch schwerlich dahin kommen. Man hat daher keine andere Theilung als die, die durch fortgesetztes Halbiren entsteht. Nur den rechten Winkel kann man in drei gleiche Theile theilen, weil ein Winkel eines gleichseitigen Dreieckes $\frac{2}{3}$ R mißt. Um einen beliebigen Winkel in drei gleiche Theile zu theilen, findet sich in einigen Lehrbüchern folgende Lösung: Fig. 100.

Man beschreibe aus C den Halbkreis ABD, errichte in C die Senkrechte CE auf den Durchmesser, lege durch den Punkt B ein Lineal durch Hin- und Herrücken so, daß die Durchschnitte desselben mit der Senkrechten CE und dem verlängerten Durchmesser genau um den Durchmesser von einander entfernt sind, so daß also HF = AD wird, zieht CG, so ist

$$\angle GCD = \tfrac{1}{3} \angle ACB.$$

Bew. Wenn man aus dem Mittelpunkte einer Hypotenuse einen Kreis beschreibt, dessen Radius gleich der halben Hypotenuse ist, so geht die Peripherie durch die Spitze des rechten Winkels; denn ginge sie nicht durch, so wäre der Winkel größer oder kleiner als ein rechter; daher wird auch eine Peripherie aus dem rechten Winkel beschrieben, die die halbe Hypotenuse zum Radius hat, die Hypotenuse halbiren. Wendet man dieses auf den obigen Fall an, so ist

$$CG = FG = HF = \tfrac{1}{2}\, AD, \text{ daher}$$
$$\angle n = \angle p, \angle m = \angle v, \angle m = \angle n + \angle p.$$

Verlängert man nun CG rückwärts, so ist

$$\angle x + \angle r = \angle m + \angle v, \text{ oder}$$
$$\angle x + \angle n = 2 \angle n + 2 \angle n, \text{ oder}$$
$$\angle x + \angle n = 4 < n, \text{ oder}$$
$$\angle x = 3 < n, \text{ oder}$$
$$\tfrac{1}{3} < x = \angle n.$$

Eilfte Aufgabe.

Einen gegebenen Winkel zu messen.

Auflösung. Man bringe den Mittelpunkt eines Transporteurs in den Scheitel des Winkels, die Richtung des Durchmessers auf einen Schenkel, so sieht man, wie viele Einheiten auf den Winkel kommen.

Anmerkung. Um den Winkel zu messen, den zwei Linien von zwei Gegenständen aus nach den Mittelpunkt des eingetheilten Kreises gezogen gedacht machen, bringt man zuerst einen um den Mittelpunkt beweglichen Schenkel in die Richtung der einen Geraden, und dann in die Richtung der andern Geraden, so sieht man inzwischen die Menge der Einheiten.

Zwölfte Aufgabe.

Einen Winkel von, in Zahlen, gegebener Größe herzustellen.

Auflösung. Man bringe den Transporteur an den Ort des Scheitels und den Durchmesser in die Richtung des einen Schenkels, so wird man leicht am Rande den Punkt des zweiten Schenkels sehen, wodurch man diesen ziehen kann.

Dreizehnte Aufgabe.

Zwei Winkel zu addiren und zu subtrahiren.

Auflösung. Man trage nach der neunten Aufgabe die beiden Winkel mit einem gemeinschaftlichen Schenkel und demselben Scheitel neben einander, oder auf einander, so erhält man im ersten Falle die Summe, im zweiten die Differenz der beiden Winkel.

Zusatz. Das gemeinschaftliche Maß zweier Winkel zu finden.

§. 33.

Vierzehnte Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt eine Parallele zu einer gegebenen Geraden zu ziehen. Ueber die Parallellinien.

Auflösung. Man ziehe durch den Punkt eine Gerade, die die gegebene Gerade schneidet, und stelle nach der neunten Aufgabe, den gegebenen Punkt als Scheitel betrachtet, gleiche Wechselwinkel, oder gleiche correspondirende Winkel her, wodurch der gefundene Schenkel mit der gegebenen Geraden parallel wird.

§. 34.

Fünfzehnte Aufgabe.

Den Mittelpunkt eines gegebenen Kreises zu finden. Ueber den Kreis.

Auflösung. Man ziehe eine beliebige Sehne, und halbire sie senkrecht, so geht diese Halbirungslinie durch den Mittelpunkt; ebenso verfahre man in Bezug auf eine zweite Sehne, so erhält man den Durchschnitt der beiden Halbirungslinien als Mittelpunkt.

Sechzehnte Aufgabe.

Durch drei Punkte einen Kreisumfang zu legen.

Auflösung. Man ziehe durch die drei gegebenen Punkte zwei Gerade, und halbire sie senkrecht, so ist der Durchschnitt der beiden Halbirungslinien der Mittelpunkt, und seine Entfernung von einem der gegebenen Punkte der Radius, der Kreis selbst daher zu ziehen.

Bew. Man ziehe in Fig. 101 AB und BC, halbire sie senkrecht durch DF und EG, so kann gezeigt werden: 1) daß sich diese Linien wirklich schneiden müssen; 2) daß ihr Durchschnitt von den drei gegebenen Punkten gleich weit entfernt ist.

Zieht man DE, so ist

$$\left.\begin{array}{l}\angle FDE < R\\ \angle GED < R\end{array}\right\}\text{ (als Theile von R)}$$

$$\overline{\angle FGE + \angle GED < 2\,R,}\text{ d. h.}$$

DF und EG müssen sich schneiden.

Zieht man ferner HA, HB und HC, so ist in

$$\triangle AHD \text{ und } \triangle BHD$$

$$AD = BD$$

$$\angle ADH = \angle BDH$$

$$HD = HD$$

$$\overline{\triangle AHD \cong \triangle BHD,}$$

$$\text{u. } HA = HB.$$

Ferner ist in $\triangle$ BHE und $\triangle$ CHE

$$BE = CE$$

$$\angle BEH = \angle CEH$$

$$HE = HE$$

$$\overline{\triangle BHE \cong \triangle CHE,}$$

$$\text{u. } HB = HC.$$

Aus beiden folgt also HA = HB = HC.

Anmerkung. Liegt eine Figur so innerhalb eines Kreises, daß sich alle ihre Ecken in der Peripherie befinden, so sagt man, die Figur sey in den Kreis eingeschrieben, oder der Kreis sei um die Figur beschrieben.

Liegt ein Kreis so in einer Figur, daß alle Seiten als Tangenten an denselben erscheinen, so sagt man, der Kreis sey in die Figur eingeschrieben, oder die Figur sey um den Kreis beschrieben.

I. Zusatz. Um ein Dreieck einen Kreis zu beschreiben.

II. Zusatz. Wenn man die drei Seiten eines Dreieckes senkrecht halbirt, so schneiden sich alle drei Halbirungslinien in einem Punkte.

Siebenzehnte Aufgabe.

In ein Dreieck einen Kreis einzuschreiben.

Auflösung. Man halbire zwei Winkel des Dreieckes, so ist der Durchschnitt der beiden Halbirungslinien der Mittelpunkt, das Perpendikel von demselben auf eine Seite aber der Radius des verlangten Kreises.

Bew. Man halbire in Fig. 102 die beiden Winkel A und B, so ist $< DAB + \angle DBA < 2R$ (als zwei halbe Dreieckswinkel), d. h. AD und BD müssen sich schneiden. Zieht man nun die Perpendikel auf die Seiten DE, DF und DG, so ist in

$$\triangle AED \text{ und } \triangle AFD$$
$$AD = AD$$
$$\angle DEA = \angle DFA \ (= R)$$
$$\angle EAD = \angle FAD$$

$$\triangle AED \cong \triangle AFD, \text{ und}$$
$$DE = DF.$$

Ferner ist in $\triangle BFD$ und $\triangle BGD$

$$BD = BD$$
$$\angle DFB = \angle DGB$$
$$\angle DBF = \angle DBG$$

$$\triangle BFD \cong \triangle BGD, \text{ und}$$
$$DF = DG.$$

Aus beiden ist also $DE = DF = DG$, mithin kann aus D mit dem Radius DE der Kreis beschrieben werden, an den alle Seiten des Dreieckes tangiren.

Achtzehnte Aufgabe.

Ueber eine gegebene Gerade einen Kreisabschnitt zu beschreiben, der einen gegebenen Winkel faßt.

Auflösung. Man verlängere in Fig. 103 AB nach D hin, und mache im Punkte B den Winkel DBE = ∠ C, ziehe BO senkrecht auf BE und GO auf AB, in deren Mitte, aus dem Durchschnittspunkte O beschreibe man, mit dem Halbmesser OB, einen Kreis; so wird AMB der verlangte Abschnitt seyn.

Bew. Weil BE auf dem Ende des Halbmessers OB senkrecht ist, so ist BE eine Tangente, und der Winkel ABF hat zum Maße die Hälfte des Bogens AKB. Ferner hat auch der Winkel AMB, als eingeschriebener Winkel, zum Maße die Hälfte des Bogens AKB; folglich ist der Winkel AMB = ∠ ABF = ∠ EBD = ∠ C; mithin sind alle in den Abschnitt AMB eingeschriebenen Winkel dem gegebenen Winkel gleich.

Anmerkung. Wäre der gegebene Winkel ein rechter, so würde der gesuchte Abschnitt ein über dem Durchmesser AB beschriebener Halbkreis seyn.

Zusatz. Ueber eine gegebene Gerade einen rechten Winkel zu beschreiben.

Neunzehnte Aufgabe.

Durch einen auf der Peripherie eines Kreises gegebenen Punkt eine Tangente an diesen zu legen.

Auflösung. Man ziehe zum gegebenen Punkt den Radius und errichte im Endpunkte eine Senkrechte darauf, so ist diese auch die verlangte Tangente.

Zwanzigste Aufgabe.

Von einem Punkte außerhalb eines Kreises eine Tangente an diesen zu legen.

Auflösung. Man verbinde den gegebenen Punkt mit dem Mittelpunkte des Kreises, beschreibe über diese Linie als Durchmesser einen Kreis, so sind die Durchschnitte der beiden Kreise die Berührungspunkte der möglichen zwei Tangenten, wodurch diese selbst ziehbar sind.

Bew. Es sey der Kreis um M Fig. 104 der gegebene, A der gegebene Punkt, B der Mittelpunkt der Geraden MA, so sind AC und AD Tangenten an den Kreis um M; denn zieht man MC und MD, so ist

$\angle MCA = R,$ $\angle MDA = R,$ } als Peripheriewinkel auf dem Durchmesser, daher AC und AD Tangenten an den Kreis um M.

Einundzwanzigste Aufgabe.

Eine Gerade zu finden, die zwei gegebene Kreise zugleich tangirt.

Auflösung. Man ziehe in Fig. 105 die Centrallinie MN, suche ihren Mittelpunkt A, und ziehe einen Halbkreis um MN, mache MB = MC — ND, verlängere MB bis E, so ist E ein Berührungspunkt; zieht man ferner NF ⋕ ME, so ist F der zweite Berührungspunkt, und EF Tangente an beide Kreise.

Bew. Es ist

EB = ME — MB = ME — MC + ND = NF ferner EB ⋕ NF, daher, wenn man BN zieht, BF ein Parallelogramm, und zwar, da $\angle$ MBN = R ist, ein Rechteck,

daher $\angle MEF = R,$

$\angle NFE = R$

daher EF Tangente an beide Kreise.

Anmerkung. Trägt man auf den Hilfskreis die Summe der beiden Radien der gegebenen Kreise von M aus als Sehne auf, so erhält man durch dieselbe Construktion eine Tangente, die zwischen beiden Kreisen durchgeht.

§. 35.

Zweiundzwanzigste Aufgabe.

Construktion der Dreiecke.

Aus drei geraden Linien ein Dreieck herzustellen.

Auflösung. Auf eine unbestimmte Gerade trage man eine der drei gegebenen Linien als Grundlinie, beschreibe aus ihren Endpunkten Kreise, wovon der eine die zweite, der andere die dritte gegebene Linie zum Radius hat, so ist der Durchschnitt dieser beiden Kreise die Spitze des verlangten Dreieckes, daher dieses vollkommen bestimmt. Fig. 106.

Dreiundzwanzigste Aufgabe.

Aus zwei Seiten und einen Winkel ein Dreieck herzustellen.

Auflösung. In Hinsicht auf die Ordnung, wie man diese Größen in ein Dreieck bringt, ergeben sich drei Fälle: entweder kommt der gegebene Winkel zwischen die gegebenen Seiten, oder er liegt der größern, oder der kleinern gegenüber.

I. Soll der gegebene Winkel zwischen die gegebenen Seiten kommen, so zeichnet man einen Winkel, der dem gegebenen gleich ist, trägt auf die beiden Schenkel die beiden gegebenen Geraden, und verbindet ihre Endpunkte, so ist das Dreieck hergestellt. Fig. 107. a.

II. Soll der gegebene Winkel der größern Linie gegenüberliegen, so zeichnet man einen Winkel, der dem gegebenen gleich ist, trägt die kleinere Seite auf einen Schenkel, und beschreibt aus ihrem Endpunkte mit der größern Seite einen Kreis, verbinde seinen Durchschnitt mit dem Endpunkte der ersten Seite, so ist das Dreieck hergestellt. Fig. 107. b.

III. Soll der gegebene Winkel der kleinern von den gegebenen Geraden gegenüberliegen, so zeichnet man eine Winkel, der dem gegebenen gleich ist, trägt auf einen Schenkel die größere Linie, und beschreibt aus ihrem Endpunkte mit der kleinern Linie einen Kreis, wo alsdann dieser den andern Schenkel des Winkels schneidet, befindet sich das dritte Eck des Dreieckes. Fig. 107. c.

Anmerkung. Man sieht, daß im letzten Falle das Dreieck nicht vollkommen bestimmt ist, sondern zwei Dreiecke möglich sind, und daß diese Dreiecke durch das Gesetz, daß die zwei der größern Seite gegenüberliegenden Winkel zusammen gleich zwei rechten sind, verbunden sind; daher die Beschränkung im Congruenzfalle.

Vierundzwanzigste Aufgabe.

Aus einer Seite und zwei Winkeln ein Dreieck herzustellen.

Auflösung. In Hinsicht auf die Ordnung, wie diese Größen im Dreiecke vorkommen können, sind drei Fälle möglich: entweder liegen beide Winkel an der gegebenen Seite, oder es liegt der größere, oder der kleinere gegenüber.

I. Sollen beide gegebene Winkel an der gegebenen Geraden liegen, so zeichnet man eine unbestimmte Gerade, trägt die gegebene auf, und zeichnet an ihre Endpunkte die gegebenen Winkel, wo sich alsdann ihre Schenkel schneiden, liegt die Spitze des Dreieckes. Fig. 108. a.

II. Soll der kleinere an der gegebenen Seite, und der größere ihr gegenüberliegen, so kann man entweder zuerst den dritten Winkel suchen, und diesen ebenfalls an die gegebene Seite zeichnen, oder man zeichnet den gegenüberkommenden Winkel an einen beliebigen Ort der zweiten Seite, und verschiebt dann den gefundenen Schenkel parallel seiner ersten Lage, bis er durch den Endpunkt der Grundlinie geht, so ist das Dreieck hergestellt. Fig. 108. b.

III. Soll der kleinere von den gegebenen Winkeln der gegebenen Geraden gegenüberstehen, so verfährt man, wie in Nro. II. Fig. 108. c.

I. Zusatz. Aus einem Winkel, einer Seite, und der Summe der beiden andern Seiten das Dreieck herzustellen. Fig. 109.

II. Zusatz. Aus zwei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel ein Parallelogramm herzustellen. Fig. 110.

Drittes Buch.

Von der Form, der Größe und den Verhältnissen der Figuren.

§ 36.

Erklärung. Im ersten und zweiten Buche haben wir die Prinzipien der Geometrie behandelt, im ersten in Bezug auf die gerade Linie und den Winkel, im zweiten in Bezug auf den Kreis und dessen Benützung zum Maße der Winkel. Es wurden in diesen zwei Büchern die wesentlichen Eigenschaften der Figuren auseinandergesetzt, und gezeigt, wie gerade Linien und Winkel gemessen werden. Unsere Meßinstrumente sind auch nur zum Messen dieser beiden Größen bestimmt, so wie unsere Constructionsinstrumente nur aus Lineal und Zirkel bestehen. Ferner sind in diesen beiden Büchern alle Arten von Beweisführung, die in der Geometrie vorkommen können, enthalten. Das dritte und vierte Buch bilden Vom Inhalte und der Eintheilung des dritten Buches.

eigentlich die Anwendung dieser Prinzipien in der Ebene. In ihnen wird gezeigt, worin das Wesen der Form und der Größe der geometrischen Größen besteht, und wie man aus dem Maße der bestimmenden Größen das Maß der Größen selbst finden kann. Das vierte Buch beschäftigt sich wieder besonders mit dem Kreise. Das dritte Buch zerfällt in vier Theile, der erste hat das Wesen der Form der Figuren und als Anwendung Verhältnisse von Linien, der zweite die Größe der Figuren, der dritte die Verhältnisse der Figuren überhaupt und als Anwendung ihr Maß, der vierte die Verhältnisse der ähnlichen Figuren zu entwickeln.

A. Von der Form der Figuren und den Verhältnissen zwischen Linien.

§. 37.

Erster Satz. Lehrsatz.

Hauptsatz. Wenn man in einem Dreiecke zu einer Seite eine Parallellinie zieht, so verhalten sich:

1) Die Stücke und ihre Seite auf der einen Seite, wie auf der andern;
2) Die Parallellinien, wie die Entfernungen ihrer gleichseitigen Endpunkte von der Spitze.

Dat. DE # AB;

Fig. 111. Thes. $\begin{cases} AD : DC : AC = BE : EC : BC, \\ AB : DE = BC : EC = AC : DC. \end{cases}$

Bew. I. Sucht man das gemeinschaftliche Maß für AD und DC, so gilt dasselbe auch für AC, und man erhält z. B.

$$AD : DC : AC = 2 : 3 : 5.$$

Denkt man nun durch die Theilungspunkte Parallellinien zu AB, so werden BE, EC und BC in ebenso viele unter sich gleiche Theile getheilt, und man hat daher

$$BE : EC : BC = 2 : 3 : 5.$$

Aus der Vergleichung dieser beiden Arten von Proportionen erhält man

$$AD : DC : AC = BE : EC : BC.$$

I. Anmerkung. Für den Fall, daß die zwei Stücke einer Seite kein gemeinschaftliches Maß haben, d. h. incommensurabel (irrational) sind, kann man den Beweis besonders führen, und zwar auf indirekte Weise nach Art des fünfzehnten Lehrsatzes im zweiten Buche. Es ist aber kein besonderer Beweis nothwendig, da die beiden Stücke jedenfalls ein beliebig annäherndes Maß haben, wodurch die Parallellinie beliebig nahe an DE zu liegen kommt, d. h. zuletzt mit DE zusammenfällt. Derselbe Fall findet in der Arithmetik statt, wo ein endlicher oder periodischer Dezimalbruch ein beliebig annäherendes Maß mit einem nicht periodischen unendlichen Dezimalbruch gemein hat.

II. Anmerkung. Die Proportion, in der die ganzen Seiten vorkommen, kann man auch durch Veränderung der Proportion der Stücke ableiten.

II. Zieht man DF # EB, so ist DE = FB, und nach Nro. I.

AB : AF : FB = AC : AD : DC, daraus mit Weglassung von AF und AD

$$AB : DE = AC : DC \text{ und } = BC : EC.$$

I. Zusatz. Zieht man in einem Dreiecke zu einer Seite mehrere Parallellinien, so stehen:

1) die beiden getheilten Seiten und beliebige Stücke, in gleicher Ordnung genommen;
2) die Parallellinien mit den gleichseitigen Entfernungen ihrer Endpunkte von der Spitze in Proportion.

II. Zusatz. Sind in einem Dreiecke zu einer Seite mehrere Parallellinien gezogen, die durch mehrere gerade Linien von der Spitze auf die Grundlinie gezogen durchschnitten werden, so werden sowohl die Parallellinien, als die

Geraden von der Spitze aus in proportionirte Theile getheilt, und es verhalten sich z. B. zwei Parallellinien, wie ihre Entfernungen von der Spitze.

Fig. 112. Dat. $\left\{ \begin{array}{l} AB \# ED, \\ \angle AFC = DGC = R; \end{array} \right.$

Thes. $AB : DE = CF : CG.$

Bew. Nach obigem Lehrsatze ist

$$AB : DE = BC : EC$$
$$CF : CG = BC : EC$$

$$AB : DE = CF : CG.$$

III. Zusatz. Wenn man mehrere gerade Linien durch drei oder mehrere Parallellinien durchschneidet, so sind alle zwischen den Parallellinien liegenden Stücke proportionirt.

Bew. Man kann alle Linien parallel ihrer ersten Lage verschieben, ohne die Größe der Stücke zu ändern, bis sie durch einen gemeinschaftlichen Punkt gehen, wodurch dieser Satz auf I. Zusatz reducirt ist.

IV. Zusatz. Wenn zwei Seiten eines Dreieckes bei gleicher Ordnung der Stücke in proportionirte Theile getheilt sind, so ist die gerade Verbindungslinie zweier Theilungspunkte mit der ungetheilten Seite parallel.

Fig. 113. Dat. $AC : DC = BC : EC;$

Thes. $DE \# AB.$

Bew. Wäre DE nicht parallel zu AB, so gäbe es durch D eine andere Linie, die zu AB parallel wäre, z. B. DF, alsdann wäre

$$AC : DC = BC : FC,$$ es ist aber
$$AC : DC = BC : EC$$

daher wäre FC = EC, was unmöglich ist, da FC nur ein Theil von EC ist, also ist auch unmöglich

DF # AB. Da aber dieses von jeder andern Linie durch D gilt, so ist

DE # AB.

V. Zusatz. Halbirt man in einem Dreiecke den Winkel an der Spitze, so wird die Grundlinie in zwei Theile getheilt, die bei gleicher Ordnung mit den beiden Seiten proportionirt sind.

Fig. 114. Dat. $\angle$ ACE = $\angle$ BCE;
Thes. AE : EB = AC : BC.

Bew. Verlängert man eine der beiden Seiten so, daß die Verlängerung der andern gleich ist, z. B. AC bis F, so daß CF = BC ist, und zieht BF, so ist

$$\angle x = \angle y$$
$$\angle z = \angle v$$
$$\angle x + \angle y = \angle z + \angle v$$
$$2 \angle x = 2 \angle z$$
$\angle x = \angle z$, daher
CE # FB, und daraus
AE : EB = AC : CF, oder
AE : EB = AC : BC.

VI. Zusatz. Wenn man die Grundlinie eines Dreieckes in zwei Theile theilt, die bei gleicher Ordnung mit den beiden Seiten proportionirt sind, so halbirt die Verbindungslinie des Theilungspunktes mit der Spitze den Winkel.

Fig. 114. Dat. AE : EB = AC : BC;
Thes. $\angle$ ACE = $\angle$ BCE.

Bew. Verlängert man AC bis F so, daß CF = BC wird, und zieht FB, so ist

$$AE : EB = AC : BC, \text{ oder}$$
$$AE : EB = AC : CF, \text{ daher}$$
$$CE \# FB, \text{ woraus folgt}$$
$$\angle z = \angle x$$
$$\angle v = \angle y, \text{ es ist aber}$$
$$\angle z = \angle v$$
$$\angle x = \angle y, \text{ oder}$$
$$\angle ACE = \angle BCE = \tfrac{1}{2} \angle ACB.$$

Erklärung. In obigem Lehrsatze ist durch die Parallellinie vom ganzen Dreieck ein Stück abgeschnitten worden, welches ebenfalls ein Dreieck ist. Mit Rücksicht auf die Parallellinien und die Proportionen in Nr. II. sieht man, daß in diesen beiden Dreiecken 1) alle Winkel einander gleich, 2) alle Seiten proportionirt sind; solche Dreiecke nennen wir ähnliche, d. h. Dreiecke von gleicher Form. Die Form einer Figur ist daher durch die Größe der Winkel und das Verhältniß der Seiten bestimmt. Da aber die Größen in einem Dreiecke selbst wieder von einander abhängig sind, so wollen wir im Folgenden suchen, bei welchen Daten Dreiecke ähnlich sind. Das Zeichen der Aehnlichkeit ist ∽.

§. 38.

Zweiter Satz. Lehrsatz.

Von der Aehnlichkeit der Dreiecke.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Winkel in dem einen so groß sind, wie im andern.

Fig. 115. Dat. $\begin{cases} \angle A = \angle D, \\ \angle B = \angle E; \end{cases}$

Thes. $\triangle ABC \backsim \triangle DEF.$

Bew. Macht man $CM = FD$, und zieht $MN \# AB$, so ist in

$\triangle$ MNC u. $\triangle$ DFE

MC = DF

$\angle$ M = $\angle$ D (= $\angle$ A)

$\angle$ N = $\angle$ E (= $\angle$ B)

$\triangle$ MNC $\cong$ $\triangle$ DEF; es ist aber

$\triangle$ MNC $\sim$ $\triangle$ ABC,

$\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ DEF,

und AB : DE = AC : DF = BC : EF.

Dritter Satz. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in ihnen zwei Seiten proportionirt sind, und ein Winkel gleich ist.

Anmerkung. Dieser Satz zerfällt vermöge der Lage des Winkels in zwei.

A. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in ihnen zwei Seiten proportionirt, und die eingeschlossenen Winkel gleich sind.

Fig. 115. Dat. { AB : DE = AC : DF, $\angle$ A = $\angle$ D;

Thes. $\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ DEF.

Bew. Macht man CM = FD, und zieht MN # AB, so ist

AB : DE = AC : DF,

AB : MN = AC : MC

MN = DE. Nun ist

in $\triangle$ MNC u. $\triangle$ DEF

$$MC = DF$$

$$MN = DE$$

$$\angle M = \angle D \; (= \angle A)$$

$\triangle$ MNC $\cong$ $\triangle$ DEF; es ist aber

$\triangle$ MNC $\sim$ $\triangle$ ABC

$\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ DEF, und

$$\angle C = \angle F$$

$$\angle B = \angle E$$

$$BC : EF = AB : DE = AC : DF.$$

B. **Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in ihnen zwei Paar Seiten proportionirt, und ein Paar gegenüberliegende Winkel gleich sind, die Summe der zwei andern gegenüberliegenden Winkel aber größer oder kleiner als zwei rechte ist.**

Dat. $\begin{cases} AB : DE = BC : EF, \\ \angle A = \angle D, \\ \angle C + \angle F > \text{od.} < 2R; \end{cases}$

Fig. 116.

Thes. $\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ DEF.

Bew. Macht man CN = FD, und zieht MN $\#$ AB, so ist

$$AB : DE = BC : EF$$

$$AB : MN = BC : NC$$

MN = DE. Nun ist

in $\triangle$ MNC u. $\triangle$ DEF

$$NC = EF$$

$$\angle M = \angle D \; (= \angle A)$$

$$MN = DE$$

$$\angle C + \angle F > \text{od.} < 2R$$

$\triangle$ MNC $\cong$ $\triangle$ DEF; es ist aber

$$\triangle MNC \sim \triangle ABC$$

$$\triangle ABC \sim \triangle DEF, \text{ und}$$
$$\angle C = \angle F$$
$$\angle B = \angle E$$
$$AC : DF = AB : DE = BC : EF.$$

Anmerkung. Auch hier wie in der Congruenz läßt bei den gegebenen Größen jedes Dreieck zwei Formen zu, wovon die entsprechenden einander ähnlich sind. Die vierte Bedingung, die im Lehrsatze noch ausgesprochen ist, verhindert nur, daß nicht zwei verschiedene Formen mit einander verglichen werden, die durch das Gesetz zusammenhängen, daß die zwei Winkel zusammen gleich zwei rechten sind. Ebenso wäre hier auch noch der Satz möglich: zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in ihnen zwei Seiten proportionirt und die den größern Seiten gegenüberliegenden Winkel einander gleich sind, welcher Satz dem obigen untergeordnet ist.

Vierter Satz. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn in ihnen alle Seiten proportionirt sind.

Fig. 115. Dat. $AB : DE = AC : DF = BC : EE$;
Thes. $\triangle ABC \sim \triangle DEF$.

Bew. Macht man $CM = FD$, und zieht $MN \# AB$, so ist

$$AB : DE = AC : DF = BC : EF,$$
$$AB : MN = AC : MC = BC : NC$$

$$MN = DE, \; NC = EF, \text{ daher ist}$$
in $\triangle MNC$ u. $\triangle DEF$
$$MC = DF$$
$$MN = DE$$
$$NC = EF$$

$$\triangle MNC \cong \triangle DEF; \text{ es ist aber}$$

$$\frac{\triangle\ MNC \backsim \triangle\ ABC}{\triangle\ ABC \backsim \triangle\ DEF}$$, und

$\angle A = \angle D$

$\angle B = \angle E$

$\angle C = \angle F.$

Zusatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn ihre Seiten parallel sind, oder auf einander senkrecht stehen.

§. 39.

Fünfter Satz. Lehrsatz.

Von der Aehnlichkeit der Polygone. Wenn zwei Polygone aus Dreiecken bestehen, so daß die Dreiecke des einen einzeln den Dreiecken des andern ähnlich sind, so sind alle Polygonswinkel einzeln einander gleich und alle ihre Seiten proportionirt.

Dat. $\begin{cases} \triangle\ ABC \backsim \triangle\ abc, \\ \triangle\ ACD \backsim \triangle\ acd; \end{cases}$

Fig. 117.

Thes. $\begin{cases} \angle A = \angle a, \\ \angle B = \angle b, \\ \angle C = \angle c, \\ \angle D = \angle d, \\ AB : ab = BC : bc = CD : cd = DA : da. \end{cases}$

Bew. Da $\triangle\ ABC \backsim \triangle\ abc$, so ist

$\angle BAC = \angle bac,$

$\angle ABC = \angle abc$

$\angle BCA = \angle bca$

$AB : ab = BC : bc = AC : ac.$

Da ferner $\triangle\ ACD \backsim \triangle\ acd$, so ist

$\angle CAD = \angle cad$

$\angle ACD = \angle acd$

$\angle ADC = \angle adc$

$AC : ac = CD : cd = AD : ad.$

Daher ist auch $\angle A = \angle a$
$\angle B = \angle b$
$\angle C = \angle c$
$\angle D = \angle d$

$AB : ab = BC : bc = CD : cd = DA : da.$

Anmerkung. Daher gibt es bei jeder Seitenanzahl Polygone, in denen alle Winkel einander gleich, und alle Seiten proportionirt sind; solche Polygone nennen wir ähnliche. Daraus sieht man auch zugleich, daß für die Bestimmung der Form eines Polygons ebenso viele Größen unbestimmt bleiben dürfen, wie bei den Dreiecken, woraus sich folgende Sätze ergeben:

Zwei Polygone sind einander ähnlich, wenn in ihnen alle Winkel einzeln einander gleich, und alle Seiten proportionirt sind, mit Ausnahme
1) zweier Seiten und eines Winkels, und
2) einer Seite und zweier Winkel.

Sechster Satz. Lehrsatz.

Zwei ähnliche Polygone werden durch gleichliegende Diagonallinien in ähnliche Dreiecke getheilt.

Dat. $ABCD \backsim abcd$;

Fig. 117. Thes. $\begin{cases} \triangle ABC \backsim \triangle abc, \\ \triangle ACD \backsim \triangle acd. \end{cases}$

Bew. Es ist in $\triangle ABC$ u. $\triangle abc$
$\angle ABC = \angle abc$
$AB : ab = BC : bc$

$\triangle ABC \backsim \triangle abc$
$\angle BCA = bca$
$\angle BAC = bac$
$AC : ac = BC : bc.$

Ferner ist in $\triangle$ ACD u. $\triangle$ acd

$$\angle ACD = \angle acd \begin{cases} BCD = bcd \text{ u.} \\ BCA = bca \end{cases}$$

$$AC : ac = CD : cd \; (= BC : bc)$$

$$\angle ACD \backsim \angle acd.$$

Auf diese Weise kann man den Beweis fortsetzen bei mehrseitigen Polygonen.

Zusatz. Die Grenzen (Perimeter) zweier ähnlicher Polygone verhalten sich wie zwei einzelne Seiten oder Diagonallinien.

Fig. 117. Dat. ABCD $\backsim$ $\triangle$ abcd;
Thes. Pm.: pm. = AB : ab = AC : ac.

Bew. Es ist nach den Daten

$$AB : ab = AB : ab$$
$$BC : bc = AB : ab$$
$$CD : cd = AB : ab$$
$$DA : da = AB : ab$$

$$Pm. : pm. = AB : ab = AC : ac.$$

§. 40.

Siebenter Satz. Lehrsatz.

Ableitung einiger Verhältnisse mittelst Aehnlichkeit der Dreiecke.

Wenn sich zwei Sehnen eines Kreises durchschneiden, so bilden die vier Stücke in umgekehrter Ordnung eine Proportion; oder das Produkt aus den zwei Stücken der einen Sehne ist gleich dem Produkte aus den zwei Stücken der andern Sehne.

Fig. 118. Thes. AE : DE = CE : BE.

Bew. Zieht man AC und DB, so ist

in △ ACE u. △ BDE

∠ CAE = ∠ BDE } Peripheriew. auf
∠ ACE = ∠ DBE } gleichen Bögen.
∠ AEC = ∠ BED

△ ACE ∽ △ BDE
CE : BE = AE : DE = AC : BD, oder
AE : DE = CE : BE, und
AE . EB = CE . ED.

Achter Satz. Lehrsatz.

Wenn sich zwei Sekanten außerhalb des Kreises schneiden, so verhalten sie sich umgekehrt wie ihre äußern Stücke.

Fig. 119. Thes. AB : CB = EB : DB.

Bew. Zieht man AC und DE, so ist
∠ ACE + ∠ ADE = 2R (gleich d. halben Periph.)
∠ ADE + ∠ EDB = 2R

∠ ACE + ∠ ADE = ∠ ADE + ∠ EDB
∠ ACE = ∠ EDB, daher ist
in △ ABC u. △ DBE
∠ ACB = ∠ EDB
∠ ABC = ∠ EBD
∠ CAB = ∠ DEB

△ ABC ∽ △ EBD, und
AB : EB = AC : ED = CB : DB, oder
AB : BC = EB : DB.

Zusatz. Jede Tangente ist die mittlere Proportionallinie, oder das geometrische Mittel zwischen einer Sekante und dem äußern Stücke.

Fig. 120. Thes. BC : AB = AB : BD, oder

$$AB = \sqrt{BC : BD}.$$

Bew. Zieht man AC und AD, so ist

in $\triangle ABC$ u. $\triangle ABD$

$\angle ABC = \angle ABD$

$\angle ACB = \angle DAB$

$\triangle ABC \sim \triangle ABD$, und

$AC : AD = AB : DB = BC : AB$, oder

$BC : AB = AD : BD$.

Aus dieser Proportion folgt

$$AB \,.\, AB = BC \,.\, BD,$$

daher findet man AB, wenn man das Produkt BC . BD in zwei gleiche Faktoren zerlegt, und einen davon nimmt, d. h.

$$AB = \sqrt{BC \,.\, BD}.$$

Neunter Satz. Lehrsatz.

Wenn man in einem rechtwinkligen Dreiecke vom rechten Winkel ein Perpendikel auf die Hypotenuse zieht, so wird diese in zwei Stücke getheilt, und es ist:

1) jede Kathete mittlere Proportionallinie zwischen der ganzen Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden Stücke;
2) das Perpendikel ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Stücken der Hypotenuse.

Dat. $\begin{cases} \angle CAB = R, \\ \angle ADC = \angle ADB; \end{cases}$

Fig. 121.

Thes. $\begin{cases} BC : AB = AB : BD, \\ BC : AC = AC : CD, \\ CD : AD = AD : BD. \end{cases}$

Bew. Es ist in

$\triangle$ ABC u. $\triangle$ ABD
$\angle CAB = \angle ADB \; (= R)$
$\angle ABC = \angle ABD$ (derselbe Winkel)
$\angle ACB = \angle DAB$

$\triangle ABC \backsim \triangle ABD$, und
$BC : AB = AC : AD = AB : BD$, oder
$BC : AB = AB : BD$.

Ebenso ist aus $\triangle$ ABC u. $\triangle$ ACD
$BC : AC = AB : AD = AC : CD$, oder
$BC : AC = AC : CD$.

Endlich ist in $\triangle$ ACD u. $\triangle$ ABD
$\angle ADC = \angle ADB \; (= R)$
$\angle DAC = \angle ABD \; (= R - x)$
$\angle ACD = \angle DAB$

$\triangle ACD \backsim \triangle ABD$, und
$AC : AB = DC : AD = AD : DB$, oder
$CD : AD = AD : BD$.

Anmerkung. Alle diese Gesetze sind allgemein giltig, mit welcher Einheit auch immer die vorkommenden Größen gemessen seyn mögen.

I. Zusatz. Die zweite Potenz der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes ist gleich der Summe der zweiten Potenzen der beiden Katheten; oder die Hypotenuse ist gleich der zweiten Wurzel aus der Summe der Quadrate der beiden Katheten.

Bew. Verwandelt man die beiden ersten Proportionen des obigen Lehrsatzes in Gleichungen, so hat man:

$$AB^2 = BC \,.\, BD$$
$$AC^2 = BC \,.\, CD$$

$AB^2 + AC^2 = BC\,(BD + CD)$, oder
$AB^2 + AC^2 = BC \,.\, BC$, oder
$AB^2 + AC^2 = BC^2$, daraus ist

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}.$$

II. Zusatz. Die zweite Potenz einer Kathete ist gleich der zweiten Potenz der Hypotenuse, weniger der zweiten Potenz der andern Kathete.

III. Zusatz. Wenn man in einem Kreise von einem Punkte der Peripherie ein Perpendikel auf den Durchmesser zieht, so ist dasselbe die mittlere Proportionale zwischen den Stücken des Durchmessers; oder die zweite Potenz dieses Perpendikels ist gleich dem Produkte aus den beiden Stücken des Durchmessers; oder das Perpendikel ist gleich dem geometrischen Mittel aus den beiden Stücken des Durchmessers.

Zehnter Satz. Lehrsatz.

In ähnlichen Dreiecken verhalten sich die Höhen wie die Grundlinien.

Fig. 122. Dat. $\begin{cases} \triangle ABC \backsim abc, \\ \angle ADC = \angle adc = R; \end{cases}$

Thes. $CD : cd = AB : ab.$

Bew. Es ist in $\triangle$ ACD u. $\triangle$ acd

$$\angle A = \angle a$$
$$\angle D = \angle d$$

$\triangle ACD \backsim \triangle acd$, und

$CD : cd = AC : ac;$

es ist aber $AB : ab = AC : ac,$

daher $CD : cd = AB :$

Eilfter Satz. Lehrsatz.

Wenn man in einem Dreiecke einen Winkel halbirt, so ist das Produkt aus den zwei ungetheilten Seiten gleich der Summe aus dem Pro-

dukte der beiden Stücke und dem Quadrate der Halbirungslinie.

Fig. 123. Dat. $\angle ACD = \angle BCD$;
Thes. $AC . BC = AD . BD + CD^2$.

Bew. Beschreibt man um ACB den Kreis, verlängert CD bis E, und zieht z. B. EB, so ist

in $\triangle ACD$ u. $\triangle CEB$
$\angle ACD = \angle BCE$
$\angle CAD = \angle CEB$

$\triangle ACD \sim \triangle CEB$, und
$AD : BE = CD : CB = AC : CE$, oder
$AC . BC = CD . CE$, oder
$AC . BC = CD (CD + ED)$, oder
$AC . BC = CD^2 + CD . ED$, es ist aber
$CD . ED = AD . BD$

$AC . BC = CD^2 + AD . BD$.

Anmerkung. Kennt man das Produkt und den Quotienten zweier Zahlen, so findet man die erste Zahl, die den Dividend vorstellt, indem man das Produkt und den Quotienten multiplizirt, und daraus die Wurzel zieht; dividirt man aber das Produkt durch den Quotienten und zieht daraus die zweite Wurzel, so erhält man die zweite Zahl. Daher kann man aus dem Verhältnisse und dem Produkte der beiden Seiten des obigen Dreieckes die Seiten selbst finden.

Zwölfter Satz. Lehrsatz.

In jedem Dreiecke ist das Produkt zweier Seiten gleich dem Produkte aus dem Durchmesser des umschriebenen Kreises und dem Perpendikel auf die dritte Seite.

Fig. 124. Thes. $AC . BC = CE . CD$.

Bew. Zieht man BE, so ist in

$$\triangle\ BEC \text{ u. } \triangle\ DAC$$
$$\angle\ CEB = \angle\ CAD$$
$$\angle\ CBE = \angle\ CDA\ (= R)$$

$$\triangle\ BEC \backsim \triangle\ DAC, \text{ und}$$
$$EC : AC = BC : CD, \text{ oder}$$
$$AC \cdot BC = CE \cdot CD.$$

Zusatz. Das Produkt aus den drei Seiten eines Dreieckes ist gleich dem Produkte aus der Grundlinie, Höhe und Durchmesser des umschriebenen Kreises.

Dreizehnter Satz. Lehrsatz.

In jedem Vierecke in einem Kreise ist das Produkt der beiden Diagonallinien gleich der Summe der Produkte aus den entgegengesetzten Seiten.

Fig. 125. Thes. $AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$

Bew. Man mache $CO = AD$, und ziehe BO, so ist in

$$\triangle\ ADB \text{ u. } \triangle\ IBC$$
$$\angle\ ABD = \angle\ CBI$$
$$\angle\ ADB = \angle\ BCI$$

$$\triangle\ ADB \backsim \triangle\ IBC, \text{ und}$$
$$AD : CI = BD : BC, \text{ oder}$$
$$CI \cdot BD = AD \cdot BC.$$

Ebenso ist $\triangle\ BDC \backsim \triangle\ ABI$, und
$$AI \cdot BD = AB \cdot CD.$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man
$$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD.$$

Vierzehnter Satz. Lehrsatz.

In jedem Vierecke in einem Kreise verhalten sich die beiden Diagonallinien, wie die Summen der Produkte aus den Seiten, welche auf den Enden der Diagonalen stehen.

Fig. 126. Thes.

$$AC : BD = AD . AB + BC . CD : AB . BC + AD . DC.$$

Bew. Macht man CO = AD, und zieht BO u. OC, so ist in

$$\triangle BDC \text{ u. } \triangle IOC$$
$$\angle BDC = \angle IOC$$
$$\angle DBC = \angle ICO$$

$$\triangle BDC \backsim \triangle IOC, \text{ und}$$
$$DC : OI = BD : CO, \text{ oder}$$
$$OI . BD = DC . CO, \text{ oder}$$
$$OI . BD = AD . DC.$$

Ferner ist $\triangle ABD \backsim \triangle BIC$, und

$$BD : BC = AB : BI, \text{ oder}$$
$$BI . BD = AB . BC.$$ Durch Addition ist

$$BO . BD = AB . BC + AD . DC.$$

Macht man ferner BP = AD, und zieht CP, so ist ebenso

$$CP . CA = CB . CD + AD . AB.$$

Setzt man diese beiden Produkte als Verhältniß an, und bemerkt, daß BO = CP ist, so ist

$$AC : BD = AD . AB + BC . CD : AB . BC + AD . DC.$$

B. Von der Größe der Figuren.

§. 41.

Fünfzehnter Satz. Lehrsatz.

Von der Gleichheit der Parallelogramme und Dreiecke.

Parallogramme von gleichen Grundlinien und Höhen sind einander gleich.

Fig. 127. Dat. ABDC u. EFHG sind Parallelogramme, AB = EF, ∠ K = ∠ L = R, IK = GL;

Thes. ABDC = EFHG.

Bew. Wenn man E auf A und EF in die Richtung von AB legt, so muß F auf B fallen (AB = EF), ferner muß G auf einen Punkt CD fallen (IK = GL als Entfernungen), daher muß auch GH in die Richtung von CD fallen, weil durch einen Punkt nur eine Parallele zu einer Geraden möglich ist, und es kann der Punkt G eine dreifache Lage haben, entweder innerhalb D, oder auf D, oder außerhalb D.

I. Fällt G innerhalb D wie in Fig. 127 a, so ist

in △ ACG u. △ BDH

AC = BD

AG = BH

∠ CAG = ∠ DBH

△ ACG ≅ △ BDH; ferner ist

AGDB = AGDB

ACDB = AGHB, oder

ACDB = EGHF.

8

II. Fällt G auf D, wie in Fig. 127 b, so ist

$$\triangle ACD \cong \triangle BDH$$
$$\triangle ADB = \triangle ADB$$

$$ACDB = ADHB, \text{ oder}$$
$$ACDB = EFHG.$$

III. Fällt G außerhalb D, wie in Fig. 127 c, so ist

$$\triangle ACG \cong \triangle BDH$$
$$\triangle DIG = \triangle DIG$$

$$ACDI = BIGH$$
$$\triangle AIB = \triangle AIB$$

$$ACDB = AGHB, \text{ oder}$$
$$ACDB = EFHG.$$

I. Zusatz. Zwei Dreiecke von gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind einander gleich.

Fig. 128. Dat. { AB = DE, gleiche Höhen;

Thes. $\triangle ABC = \triangle DEF$.

Bew. Zieht man CG ‡ AB, und BG ‡ AC, ebenso FH ‡ DE und EH ‡ DF, so ist

ACGB = DFHE, es ist aber auch

$\triangle ABC = \frac{1}{2}$ ACGB, und

$\triangle DEF = \frac{1}{2}$ DFHE

daher $\triangle ABC = \triangle DEF$.

II. Zusatz. Haben ein Dreieck und ein Parallelogramm gleiche Grundlinien und Höhen, so ist das Dreieck die Hälfte des Parallelogramms.

Bew. Zertheilt man das Parallelogramm durch eine Diagonallinie in zwei Dreiecke, so haben diese gleiche Grundlinie und Höhe, und sind einander congruent, ein solches Dreieck ist daher die Hälfte des Parallelogramms; ferner ist

ein solches Dreieck dem gegebenen Dreieck gleich, daher ist auch das gegebene Dreieck die Hälfte des Parallelogramms.

III. Zusatz. Ein Dreieck ist gleich einem Parallelogramm von derselben Grundlinie und der halben Höhe, oder von derselben Höhe und der halben Grundlinie.

Sechzehnter Satz. Lehrsatz.

Wenn man durch einen Punkt der Diagonallinie eines Parallelogramms zwei Parallellinien zu den Seiten des Parallelogramms zieht, so wird das ganze Parallelogramm in vier zertheilt, wovon diejenigen einander gleich sind, durch welche die Diagonallinie nicht geht.

Fig. 129. Dat. { ACDB ein Parallelogramm,
FEG # AB,
IEH # AC;

Thes. FCHE = IEGB.

Bew. Es ist △ ACD ≌ △ ABD
△ AFE ≌ △ AIE
△ EHD ≌ △ GED; durch Subtraktion der zwei letztern Dreiecke wird FCHE = IEGB.

§. 42.

Siebenzehnter Satz. Lehrsatz.

Von den Quadraten.

Wenn eine Linie aus zwei Theilen besteht, so besteht das Quadrat über diese Linien aus vier Theilen, nämlich aus den zwei Quadraten der beiden Theile und dem doppelten Rechtecke aus beiden Theilen.

Fig. 130. Dat. $\begin{cases} ACDB = \square\, AB, \\ AB = AE + EB; \end{cases}$

Thes. $\square\, AB = \square\, AE + 2 AE . EB + \square\, BE.$

Bew. Macht man AF = AE, und zieht EG # AC, und FH # AB, so ist

AE = FI = IE, und

EB = IH = IG; daher

AFIE = □ AE

IGDH = □ EB

FCGI = EIHB = AE . EB, daher

ACDB oder □ AB = □ AE + 2 AE . EB + □ EB.

Anmerkung. Wir wollen in Zukunft der Kürze wegen ein Quadrat dadurch bezeichnen, daß wir nur die Seite mit dem Zeichen □; so wie ein Rechteck, indem wir die Grundlinie und Höhe durch einen Punkt getrennt neben einander setzen.

Achtzehnter Satz. Lehrsatz.

Wenn man die Seite eines Quadrates als die Differenz zweier Linien betrachtet, so ist das Quadrat selbst gleich der Summe der Quadrate der beiden Linien, weniger dem doppelten Rechtecke aus beiden Linien.

Fig. 131. Dat. $\begin{cases} ACDB = \square\, AB, \\ AB = AE - BE; \end{cases}$

Thes. $\square\, AB = \square\, AE + \square\, BE - 2 AE . BE.$

Bew. Verlängert man AC bis F, so daß CF = BE wird, zieht FG # AB, und GEH # AC, so daß EH = BE wird, verlängert ferner DB bis I, so daß BI = BE wird, und zieht IH, so ist, wenn man CD verlängert bis L

$$AFGE = \square\, AE$$
$$BEHI = \square\, BE$$
$$IDLH = CFGL = AE\,.\,BE$$

ACDB od. $\square\, AB = \square\, AE + \square\, BE - 2\,AE\,.\,BE.$

Neunzehnter Satz. Lehrsatz.

Die Differenz zweier Quadrate ist gleich einem Rechtecke, welches die Summe der beiden Quadratseiten zur Grundlinie, und die Differenz der beiden Quadratseiten zur Höhe hat.

Fig. 132. Dat. $\begin{cases} ACDB = \square\, AB, \\ AFGE = \square\, AE; \end{cases}$

Thes.

$$\square\, AB - \square\, AE = (AB + AE)\,(AB - AE).$$

Bew. Verlängert man CD bis K so, daß $DK = AE = EG$ wird, ferner FG so, daß $HI = DK$ wird, und zieht KI, so ist

$$DH = AB - AE,\; FI = AB + AE,$$
$$HDKI = EGHB,\text{ daher}$$

$$\square\, AB - \square\, AE = (AB + AE)\,(AB - AE).$$

Zwanzigster Satz. Lehrsatz.

In jedem rechtwinkligen Dreiecke ist das Quadrat über die Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate über die beiden Katheten.

Fig. 133. Dat. $\begin{cases} CDEB = \square\, BC, \\ ABGF = \square\, AB \;\angle\, CAB = R; \\ ACIH = \square\, AC; \end{cases}$

Thes. $\square\, BC = \square\, AB + \square\, AC.$

Bew. Zieht man durch die Spitze des rechten Winkels A die Gerade AK ‡ CD, so wird das Quadrat über die Hypotenuse in zwei Rechtecke zertheilt, die einzeln den Quadraten der beiden Katheten gleich sind. Denn verschiebt man BEKL und BGFA, ohne die Grundlinien und Höhen zu ändern, d. h. zieht man EN ‡ BA, und GM ‡ BC, so ist

in BENA u. BGMC

$$\left.\begin{array}{l} BE = BC \\ BA = BG \end{array}\right\} \text{(Quadratseiten).}$$

$$\angle EBA = \angle GBC \; (= R + \angle ABC)$$

$$BENA \cong BGMC.$$ Es ist aber

$$BENA = BEKL$$

$$BGMC = BGFA$$

$$BEKL = BGFA.$$ Ebenso kann gezeigt werden,

$$CDKL = CIHA$$

$$BCDE = ABGF + ACIH,$$ oder

$$\square\, BC = \square\, AB + \square\, AC.$$

Anmerkung. Dieser Satz heißt von seinem Erfinder Pythagores, der Pythagoräische Lehrsatz, und ist in der Geometrie von der größten Wichtigkeit. Weiter unten werden wir noch auf eine Erweiterung dieses Satzes zurückkommen.

I. Zusatz. Das Quadrat über eine Kathete ist gleich dem Quadrate über die Hypotenuse weniger dem Quadrate über die andere Kathete.

II. Zusatz. In jedem stumpfwinkligen Dreiecke ist das Quadrat über die größte Seite gleich der Summe der Quadrate über die beiden andern Seiten zusammen mit dem doppelten Rechtecke aus der Grundlinie und ihrer Verlängerung bis zur Höhe.

Fig. 134. Dat. $\angle ABC > R$;
Thes. $\square\, AC = \square\, AB + \square\, BC + 2\, AB.BD.$

Bew. Es ist $\square AC = \square CD + \square AD$, ferner ist

$$\square CD = \square BC - \square BD$$
$$\square AD = \square AB + \square BD + 2\,AB.BD$$

$$\square AC = \square AB + \square BC + 2\,AB.BD.$$

III. Zusatz. In jedem spitzwinkligen Dreiecke ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten weniger dem doppelten Rechteck aus einer der beiden Seiten und ihrer Verkürzung durch die Höhe.

Fig. 135. Dat. $\angle ABC < R$;
Thes. $\square AC = \square AB + \square BC - 2\,AB.BD.$

Bew. Es ist $\square AC = \square CD + \square AD$, ferner ist

$$\square CD = \square BC - \square BD,$$
$$\square AD = \square AB + \square BD - 2\,AB.BD$$

$$\square AC = \square AB + \square BC - 2\,AB.BD.$$

IV. Zusatz. Wenn in einem Dreiecke das Quadrat einer Seite gleich ist der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, so ist das Dreieck rechtwinklig.

Fig. 136. Dat. $\square BC = \square AB + \square AC$;
Thes. $\angle CAB = R$.

Bew. Zeichnet man das rechtwinklige Dreieck EDF, so daß $DF = AC$ und $DE = AB$ wird, so ist

$\square FE = \square DE + \square DF$, es ist aber
$\square BC = \square AB + \square AC$

$\square BC = \square FE$, und
$BC = FE$
$AC = DF$
$AB = DE$

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ und
$\angle CAB = \angle FDE$; es ist aber
$\angle FDE = R$

$\angle CAB = R.$

V. Zusatz. Wenn man in einem Dreiecke von der Spitze auf die Mitte der Grundlinie eine Gerade zieht, so ist die Summe der Quadrate der beiden Seiten gleich der doppelten Summe der Quadrate, nämlich über die Halbirungslinie und die halbe Grundlinie.

Fig. 137. Dat. $AD = BD$;
Thes. $\square AC + \square BC = 2 \square CD + 2 \square AD$.

Bew. Es ist $\square AC = \square CD + \square AD + 2\, AD.DE$
$\square BC = \square CD + \square BD - 2\, BD.DE$

$\square AC + \square BC = 2 \square CD + 2 \square AD$.

VI. In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der beiden Diagonallinien gleich der Summe der Quadrate der vier Seiten.

Fig. 138. Dat. ACDB ein Parallelogramm;
Thes.
$\square AD + \square BC = \square AB + \square AC + \square CD + \square BD$.

Bew. Es ist
$\square AD = \square AB + \square BD + 2\, AB.BE$,
$\square BC = \square AB + \square AC - 2\, AB.AF$,

$\square AD + \square BC = \square AB + \square AC + \square CD + \square BD$.

VII. Zusatz. Das Quadrat über die Diagonallinie eines Quadrats ist doppelt so groß als das gegebene Quadrat.

VIII. Zusatz. Das Quadrat der halben Diagonallinie eines Quadrates ist gleich der Hälfte des gegebenen Quadrates.

C. Von dem Verhältnisse der Figuren überhaupt, und ihrem Maße.

§. 43.

Einundzwanzigster Satz. Lehrsatz.

Von den Verhältnissen der Rechtecke, Parallelogramme und Dreiecke.

Zwei Rechtecke mit zwei gleichen Seiten verhalten sich wie ihre ungleichen Seiten.

Fig. 139. Dat. ACDB und EGHF Rechtecke;
Thes. ACDB : EGHF = AB : EF.

Bew. Sucht man das gemeinschaftliche Maß von AB und EF, so erhält man z. B.

AB : EF = 5 : 3 oder m : n.

Zieht man nun durch die Theilungspunkte Parallellinien zu den Höhen, so werden die beiden Rechtecke in lauter unter sich gleiche Theile getheilt, und zwar in ebenso viele Theile wie die beiden Seiten, daher ist

ACDB : EGHF = 5 : 3 oder m : n;

aus diesen beiden Proportionen folgt

ACDB : EGHF = AB : EF.

I. Anmerkung. Auch hier kann man für den Fall, daß die beiden Seiten incommensurabel sind, einen eigenen indirekten Beweis geben, was indeß unnöthig ist, da die beiden Linien ein beliebig annäherndes Maß haben.

II. Anmerkung. Obiger Satz drückt folgende zwei Sätze aus:
1) Rechtecke von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Grundlinien;
2) Rechtecke von gleichen Grundlinien verhalten sich wie ihre Höhen.

I. Zusatz. Zwei Rechtecke überhaupt verhalten sich wie die Produkte aus Grundlinie und Höhe.

Fig. 140. Dat. ACDB und acdb sind Rechtecke;
Thes. ABCD : abcd = AB . AC : ab . ac.

Bew. Man zeichne ein Hilfsrechteck, welches mit dem einen die Grundlinie, und mit dem andern die Höhe gleich hat, z. B. EFGH so, daß EF = AB und EG = ac ist, so ist

$$\begin{array}{l} ACDB : EGHF = AC : EG \\ EGHF : acdb = EF : ab, \text{ durch Multiplikation} \\ \hline ACDB : acdb = AB \,.\, AC : ab \,.\, ac. \end{array}$$

Anmerkung. Den Inhalt einer gegebenen Figur nennt man die Zahl, welche angibt, wie oft eine als Einheit angenommene Fläche in der gegebenen enthalten ist. Es ist nun fast allgemein gebräuchlich, das Quadrat über die Längeneinheit, womit die Dimensionen der gegebenen Figur gemessen sind, als Flächeneinheit anzunehmen, welche Einheit wir durch E bezeichnen wollen. Unter dieser Voraussetzung sind die nachfolgenden Sätze zu verstehen.

I. Zusatz. Der Inhalt eines Rechteckes ist gleich dem Produkte aus Grundlinie und Höhe.

Fig. 140. Thes. ACDB = AB . AC.

Bew. Setzt man in obiger Proportion ab = ac = 1, d. h. vergleicht man das Rechteck mit dem Quadrate der Längeneinheit, das man durch E ausdrückt, so ist

$$ACDB : E = AB \,.\, AC : 1, \text{ oder}$$

$$\frac{ACDB}{E} = AB \,.\, AC, \text{ oder}$$

$$ACDB = AB \,.\, AC \,\square, \text{ oder}$$

$$ACDB = AB \,.\, AC = bh.$$

II. Zusatz. Der Inhalt eines Quadrates ist gleich der zweiten Potenz einer Seite.

III. Zusatz. Der Inhalt eines Parallelogramms ist gleich dem Produkte aus Grundlinie und Höhe.

Thes. ACDB = bh.

Bew. Da jedes Parallelogramm gleich ist einem Rechtecke von derselben Basis und derselben Höhe, der Inhalt dieses

Rechteckes aber gleich ist dem Produkte aus Grundlinie und Höhe, so ist auch der Inhalt des Parallelogramms gleich dem Produkte aus Basis und Höhe, d. h.

$$ACDB = bh.$$

IV. Der Inhalt eines Dreieckes ist gleich der Hälfte des Produktes aus Grundlinie und Höhe.

Thes. $\triangle\ ACB = \frac{1}{2}\ bh.$

Bew. Da das Dreieck gleich ist der Hälfte des Rechteckes von derselben Grundlinie und Höhe, der Inhalt des Rechteckes aber gleich ist dem Produkte aus Grundlinie und Höhe, so ist der Inhalt des Dreieckes gleich dem halben Produkte aus Grundlinie und Höhe, d. h.

$$\triangle\ ABC = \frac{1}{2}\ bh.$$

V. Zusatz. Der Inhalt eines Trapezes ist gleich dem halben Produkte aus der Höhe und der Summe der Grundlinien.

Fig. 141. Dat. AB # CD;
Thes. $ACDB = \frac{1}{2}\ h\ (a + b).$

Bew. Zieht man AD, so ist

$ACDB = \triangle\ ABD + \triangle\ CDA$, oder

$ACDB = \frac{1}{2}\ ha + \frac{1}{2}\ hb$, oder

$ACDB = \frac{1}{2}\ h\ (a + b).$

Anmerkung. Obigen Ausdruck kann man auch noch auf folgende Weise schreiben:

$$ACDB = \left(\frac{a + b}{2}\right) h, \text{ d. h.}$$

das Trapez ist gleich einem Parallelogramm, welches dieselbe Höhe und die halbe Summe der beiden parallelen Seiten zur Grundlinie hat.

Die Construction selbst ist leicht zu finden.

VI. Zusatz. Den Inhalt einer irregulären vielseitigen Figur findet man, indem man dieselbe in Dreiecke, oder Trapeze zerlegt. Fig. 142 u. 143.

VII. Zusatz. Zwei Parallelogramme verhalten sich bei gleichen Höhen wie ihre Grundlinien; bei gleichen Grundlinien wie ihre Höhen; und wenn keine gleiche Dimension vorhanden ist, wie die Produkte aus Grundlinie und Höhe.

VIII. Zusatz. Zwei Dreiecke verhalten sich bei gleichen Höhen wie ihre Grundlinien; bei gleichen Grundlinien wie ihre Höhen; und wenn keine gleiche Dimension vorhanden ist, wie die Produkte aus Grundlinie und Höhe.

Zweiundzwanzigster Satz. Lehrsatz.

Zwei Dreiecke mit einem gleichen Winkel verhalten sich wie die Produkte der diesen Winkel einschließenden Seiten.

Fig. 144. Dat. $\angle A = \angle a$;
Thes. $\triangle ABC : \triangle abc = AB \,.\, ac : ab \,.\, ac$.

Bew. Es ist, wenn man die Höhen zieht

$$\triangle ABC : \triangle abc = AB \,.\, CD : ab \,.\, cd.$$

Nun ist in $\triangle ACD$ u. $\triangle acd$

$$\angle A = \angle a$$
$$\angle D = \angle d$$

$$\triangle ACD \backsim \triangle acd \text{ und}$$
$$CD : cd = AC : ac.$$

Setzt man aber in obige Proportion anstatt $CD : cd$ as gleiche Verhältniß $AC : ac$, so ist

$$\triangle ABC : abc = AB \,.\, AC : ab \,.\, ac.$$

D. Von dem Verhältnisse der ähnlichen Figuren.

§. 44.

Dreiundzwanzigster Satz. Lehrsatz.

Aehnliche Dreiecke verhalten sich zu einander wie die Quadrate zweier gleichliegenden Seiten. Verhältniß der ähnlichen Dreiecke und Polygone.

Fig. 145. Dat. $\triangle ABC \backsim \triangle abc$;
Thes. $\triangle ABC : \triangle abc = AB^2 : ab^2$.

Bew. Es ist nach VIII. Zusatz des vorigen Lehrsatzes

$\triangle ABC : \triangle abc = AB . CD : ab . cd.$

Um aber das Verhältniß der Höhen aus diesem Satze zu entfernen, ist im

$\triangle ACD$ u. $\triangle acd$

$\angle A = \angle a$ (Dat.)

$\angle D = \angle d$ $(= R)$

$\triangle ACD \backsim \triangle acd$, und

$CD : cd = AC : ac = AB : ab$ (Dat.), daher

$CD : cd = AB : ab.$

Setzt man in obige Proportion dieses Verhältniß für das der Höhen, so ist

$\triangle ABC : \triangle abc = AB . AB : ab . ab$, oder

$\triangle ABC : \triangle abc = AB^2 : ab^2.$

Vierundzwanzigster Satz. Lehrsatz.

Aehnliche Polygone verhalten sich zu einander wie die Quadrate zweier gleichliegenden Seiten oder Diagonallinien.

Fig. 146. Dat. $ABCDE \backsim abcde$;
Thes. $ABCDE : abcde = AB^2 : ab^2 = AC^2 : ac^2$.

Bew. Zieht man AC und ac, AD und ad, so sind nach 16tem Lehrsatze die gleichliegenden Dreiecke einander ähnlich, daher nach vorhergehendem Lehrsatze

$\triangle ABC : \triangle abc = BC^2 : bc^2 = AB^2 : ab^2,$

$\triangle ACD : \triangle acd = CD^2 : cd^2 = AB^2 : ab^2,$

$\triangle AED : \triangle aed = AE^2 : ae^2 = AB^2 : ab^2,$

$ABCDE : abcde = AB^2 : ab^2$ u. $= AC^2 : ac^2.$

Zusatz. Beschreibt man über die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes drei ähnliche Polygone, so ist das Polygon über die Hypotenuse gleich der Summe der Polygone über die beiden Katheten.

Fig. 148. Dat. $\begin{cases} \angle CAB = R, \\ P_1 \backsim P_2 \backsim P_3; \end{cases}$

Thes. $P_1 = P_2 + P_3$.

Bew. Da $P_1 : P_2 : P_3 = BC^2 : AB^2 : AC^2$, so ist, wenn

$P_1 = n.BC^2$ ist, auch

$P_2 = n.AB^2$ und

$P_3 = n.AC^2$; nun ist aber

$BC^2 = AB^2 + AC^2$, oder

$n.BC^2 = n.AB^2 + n.AC^2$, oder

$P_1 = P_2 + P_3$.

Zusatz. Die drei Quadrate über die drei Seiten eines rechtwinkligen Dreieckes verhalten sich zu einander wie die Hypotenuse und ihre Stücke.

Aufgaben
zum
dritten Buche.

§. 45.
Erste Aufgabe.

Eine begrenzte gerade Linie nach einem in Linien oder Zahlen gegebenen Verhältnisse zu theilen.

Auflösung. Man ziehe durch einen Endpunkt der Geraden eine unbestimmte zweite Gerade, trage auf diese das gegebene Verhältniß auf, verbinde den letzten so erhaltenen Punkt mit dem andern Endpunkte der gegebenen Geraden, und ziehe durch die übrigen Punkte Parallellinien zur ersten Verbindungslinie, so wird durch diese die gegebene Gerade nach dem erlangten Verhältnisse getheilt. Fig. 154 a und b.

Anmerkung. Ist das Verhältniß in Brüchen gegeben, so läßt sich dasselbe leicht durch Multiplikation mit dem allgemeinen Nenner in ein gleiches Verhältniß von ganzen Zahlen verwandeln. So z. B. ist $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} : \frac{3}{4} = 6 : 8 : 9$; trägt man daher auf die unbestimmte Ge-

rade eine beliebige Einheit 23mal auf, und zieht durch den 6ten und 14ten Theilungspunkt Parallellinien zur Verbindungslinie der beiden letzten Punkte, so wird auch die gegebene Gerade nach dem Verhältnisse 6 : 8 : 9, oder $\frac{1}{2}$: $\frac{2}{3}$: $\frac{3}{4}$ getheilt.

Zweite Aufgabe.

Zu drei gegebenen Linien die vierte Proportionallinie zu finden.

Auflösung. Man trage auf den einen Schenkel eines beliebigen Winkels die beiden ersten Linien auf, auf den zweiten Schenkel alsdann die dritte, verbinde den letzten dadurch erhaltenen Punkt mit dem ersten, und ziehe durch den zweiten eine Parallele zur vorigen Verbindungslinie, so ist das zweite Stück des zweiten Schenkels die verlangte Linie. Fig. 149.

Anmerkung. Man kann für diese Aufgabe leicht andere Lösungen aus dem dritten und vierten Lehrsatze finden.

Ist verlangt zu zwei Linien die dritte Proportionale zu finden, so verfährt man auf obige Weise, indem man die Mittellinie zweimal setzt.

Dritte Aufgabe.

Durch einen Punkt zwischen den Schenkeln eines Winkels eine Linie zu ziehen, deren Theile vom gegebenen Punkte aus bis an die Schenkel einander gleich sind.

Auflösung. Man ziehe in Fig. 150 durch D die Linie DE # BC, mache EF = EB, und ziehe FDG, so ist DF = DG.

Bew. Es ist in △ BFG die Gerade ED # BG, daher

$$\begin{array}{l} BE : EF = GD : DF, \text{ ferner ist} \\ BE = EF, \text{ daher auch} \\ \hline GD = DF. \end{array}$$

Vierte Aufgabe.

Zu zwei Linien die mittlere Proportiallinie zu finden.

Auflösung. Man trage die beiden Linien auf eine einzige Gerade, beschreibe über sie als Durchmesser einen Halbkreis, und errichte durch ihren Vereinigungspunkt auf sie ein Perpendikel bis an die Peripherie, so ist dieses die verlangte mittlere Proportionallinie. Fig. 151.

Fünfte Aufgabe.

Eine begrenzte gerade Linie in das mittlere und äußere Verhältniß zu theilen, d. h. so zu theilen, daß der größere Theil die mittlere Proportinallinie wird zwischen der ganzen Linie und dem kleinern Theil; oder daß das Quadrat über den größern Theil gleich ist dem Rechtecke aus der ganzen Linie und dem kleinern Theil.

Auflösung. Man errichte im Endpunkte der gegebenen Geraden ein Perpendikel gleich der Hälfte dieser Geraden, ziehe die Hypotenuse, und ziehe davon die Hälfte der Geraden ab, so ist der übrige Theil der größere der gesuchten Theile, den man auf die gegebene Gerade aufträgt, und so den verlangten Theilungspunkt findet.

Es sey nämlich in Fig. 152 AB die gegebene Gerade; man errichte nun in A des Perpendikel AC = ½ AB, ziehe BC, und beschreibe aus C mit CA einen Kreis, der BC in

D schneidet; aus B beschreibe man ferner mit BD einen Kreisbogen, der AB in E schneidet, so ist E der verlangte Theilungspunkt, d. h. es ist

$$AB : BE = BE : AE.$$

Bew. Da $\angle$ CAB = R ist, so ist AB Tangente an den Kreis um C, verlängert man nun BC bis F, so ist

$$BF : AB = AB : BD, \text{ oder}$$

$AB + BE : AB = AB : BE$, oder durch Subtraction der Glieder $BE : AB = AE : BE$, oder

$$AB : BE = BE : AE, \text{ und}$$

$$BE^2 = AB \,.\, AE.$$

Sechste Aufgabe.

Einen verjüngten Maßstab herzustellen, der Zehntel oder Hundertel seiner Einheit enthält.

Auflösung. Man theile in Fig. 153 a die gerade Linie AB in mehrere gleiche Theile, z. B. in fünf, errichte in A das Perpendikel AG = AC, und ziehe GH # AB, mache ferner GI = IK = KL = LM = MH = AC, und ziehe IC, KD, LE, MF und HB, so werden alle diese Linien parallel AG seyn. Ferner theile man AC sowohl als GI in zehn gleiche Theile, und ziehe die Transversalen NC u. s. f.; theile ebenso AG und IC in zehn gleiche Theile, verbinde die gleichnamigen Punkte, und verlängere diese Linien, so kommen verschieden große Theile dieser Linien zwischen IC u. NC, und es ist bc = $\frac{1}{10}$ NI oder = $\frac{1}{10}$ PC, ebenso de = $\frac{2}{10}$ PC, und so jeder Theil um $\frac{1}{10}$ größer.

Bew. Es ist im $\triangle$ NCI die Linie de # IN, daher

$$de : NI = Ce : CI;$$ es ist aber

$$Ce : CI = 2 : 10,$$ daher auch

$$de : NI = 2 : 10,$$ oder

$$de = \frac{2}{10}\,NI = \frac{2}{10}\,PC = \frac{2}{100}\,AC.$$

I. Anmerkung. Soll der verlangte Maßstab z. B. der 5000 theilige seyn, der der bayerischen Landesvermessung zu Grunde liegt, d. h. soll die Einheit $bc = \frac{1}{5000}$ eines bayerischen Fußes seyn, wie in Fig. 153b, so theile man eine Linie von einem bayerischen Fuß in fünf gleiche Theile, einen solchen wieder in zehn, und einen dieser Theile abermals in zehn gleiche Theile, und verfahre mit diesem letzten Theil wie oben mit AB.

II. Anmerkung. Man übe sich in den beiden Aufgaben:

1) Eine gegebene Linie zu messen;
2) eine Linie von verlangter Größe zu zeichnen. Ferner kann man auch die beiden Maßstäbe in Hinsicht auf gegenseitige Größe untersuchen.

Siebente Aufgabe.

Ein Näherungs-Verhältniß zwischen der Seite und der Diagonale eines Quadrates zu finden.

Auflösung. Man beschreibe in Fig. 155 aus D mit DB einen Kreis, so sieht man, daß die Seite des Quadrates in der Diagonale einmal enthalten ist, und AE als Rest übrig bleibt.

Man könnte nun CD oder AB mit AE messen, und die Operation wie in der Arithmetik fortsetzen; allein es ist, wenn man AD bis F verlängert

$$AF : AB = AB : AE,$$ d. h.

anstatt AB durch AE zu messen, kann man AF durch AB messen, und man erhält denselben Quotienten; man sieht aber leicht, daß AB in AF zweimal enthalten ist, und AE als Rest bleibt. Mißt man mit diesem Rest wieder den vorigen

Divisor AB, so erhält man abermals zwei zum Quotienten, und AE als Rest.

Daraus sieht man nun:

1) daß die Seite und die Diagonale eines Quadrates kein gemeinschaftliches Maß haben;

2) daß der Kettenbruch folgender ist:

$$\frac{AB}{AD} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}}} \text{ u. s. w.}$$

Die Näherungswerthe sind daher:

$$1, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, \frac{12}{17}, \frac{29}{41}, \frac{50}{79} \ldots\ldots$$

und $AB : AD = 29 : 41 = 50 : 79 \ldots\ldots$

§. 46.

Achte Aufgabe.

Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, welches einen gegebenen Winkel hat. Ueber die Verwandlung der Figuren.

Auflösung. Man verschiebe die Spitze des Dreieckes so weit parallel zur Grundlinie, bis eine Seite mit der Grundlinie den gegebenen Winkel macht; d. h. man mache in Fig. 156 $\angle GAB = \angle DEF$, ziehe CG # AB, und verbinde G mit B, so ist

$$\triangle ABG = \triangle ABC.$$

I. Zusatz. Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, welches einen gegebenen Winkel faßt.

II. Zusatz. Ein Dreieck in ein rechtwinkliges, und ein Parallelogramm in ein Rechteck zu verwandeln.

Neunte Aufgabe.

Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, das eine gegebene Grundlinie hat.

Auflösung. Man trage die gegebene Linie DE in Fig. 157 auf AB, so daß AF = DE wird, ziehe CF, und verschiebe B parallel mit CF, bis es in die Verlängerung von AC fällt, d. h. ziehe BG # CF, und verlängere AC bis G, und ziehe alsdann FG, so ist

△ AGF = △ ABC.

Bew. Es ist △ FCG = △ FCB,
△ ACF = △ ACF

△ AFG = △ ABC.

Zehnte Aufgabe.

Ein Dreieck in ein anderes zu verwandeln, welches eine gegebene Höhe hat.

Auflösung. Man verwandle in Fig. 158 das gegebene Dreieck ABC in das rechtwinklige ABF, mache AG = DE, und ziehe BG; ferner ziehe man FH # BG und verbinde G mit H, so ist

△ AHG = △ ABC.

Bew. Es ist △ FHG = △ FHB,
△ AHF = △ AHF

△ AHG = △ ABF, es ist aber
△ ABF = △ ABC

△ AHG = △ ABC.

Zusatz. Mehrere gegebene Dreiecke zu addiren; d. h. ein Dreieck finden, das mehreren Dreiecken zusammen gleich ist.

Auflösung. Man verwandle die Dreiecke in solche, die einerlei Höhe haben, und stelle ein Dreieck her, welches dieselbe Höhe, aber die Summe aller Grundlinien zur Grundlinie hat.

Anmerkung. Man sieht leicht ein, daß in zwei gleichen Rechtecken oder Dreiecken sich die Grundlinien umgekehrt verhalten, wie die Höhen. Denn wenn

$$h_1 b_1 = h_1 b_2, \text{ so ist auch}$$
$$b_1 : b_2 = h_2 : h_1.$$

Demgemäß lassen sich obige Aufgaben mit Anwendung der vierten Proportionale lösen.

Eilfte Aufgabe.

Ein gegebenes Vieleck in ein Dreieck zu verwandeln.

Auflösung. Man verschiebe die einzelnen Ecken parallel der nächsten Diagonale, d. h. man mache das zu verschiebende Eck zur Spitze eines Dreieckes und verschiebe diese, bis sie in die Verlängerung einer der nächsten Seiten fällt.

Es sey nämlich ABCDE Fig. 159 das zu verwandelnde Vieleck. Nun ziehe man CA, ferner BF ⧣ CA, verlängere alsdann EA bis F,, so ist

$$FCDE = ABCDE.$$

Ebenso verfahre man mit dem Eck D, so ist

$$\triangle FCG = FCDF = ABCDE.$$

Zwölfte Aufgabe.

Ein Dreieck in ein Parallelogramm oder Rechteck zu verwandeln.

Auflösung. Man zeichne ein Parallelogramm oder Rechteck von derselben Grundlinie und der halben Höhe, oder von derselben Höhe und der halben Grundlinie, so ist das Dreieck dem erhaltenen Parallelogramm oder Rechteck gleich. Fig. 160.

Zusatz. Ein gegebenes Vieleck in ein Parallelogramm oder Rechteck zu verwandeln.

Dreizehnte Aufgabe.

Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Man suche zwischen Grundlinie und Höhe die mittlere Proportionale, und beschreibe über diese ein Quadrat, so ist dieses Quadrat dem gegebenen Rechtecke gleich. Fig. 161.

Zusatz. Jede beliebige geradlinige Figur in ein Quadrat zu verwandeln.

Anmerkung. Diese Aufgabe ist bekannt unter dem Namen: die Quadratur der ebenen Flächen.

Vierzehnte Aufgabe.

Ein Parallelogramm in ein anderes zu verwandeln, welches eine gegebene Gerade als Seite hat.

Auflösung. Man verlängere in Fig. 162 BD um EF, so daß DG = EF wird, ziehe GCH bis zur Verlängerung von AB, ziehe ferner HI # BG, und GI # AH, und verlängere DC und AC, so ist

$$KILC = ACDB.$$

Fünfzehnte Aufgabe.

Zwei oder mehrere Quadrate in eines zu verwandeln.

Auflösung. Man mache die zwei Seiten der gegebenen Quadrate zu Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes, so wird das Quadrat über die Hypotenuse gleich seyn der Summe der beiden gegebenen Quadrate. Sind mehrere Quadrate in eines zu verwandeln, so nimmt man obige Hypotenuse als eine Kathete eines neuen rechtwinkligen Dreieckes, wovon die Seite des dritten Quadrates die andere Kathete wird, das Quadrat der neuen Hypotenuse wird alsdann gleich seyn der Summe der drei gegebenen Quadrate. Fig. 163.

Zusatz. Die Differenz zweier Quadrate als ein Quadrat darzustellen.

Sechzehnte Aufgabe.

Ein Quadrat zu zeichnen, das sich zu einem gegebenen Quadrate verhält, wie zwei gegebene Linien.

Auflösung. Man vereinige die beiden gegebenen Geraden in eine, betrachte diese als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreieckes, und ziehe im Vereinigungspunkt ein Perpendikel auf die Hypotenuse; alsdann verschiebe man die Hypotenuse parallel sich selbst, bis die eine Kathete gleich wird der Seite des gegebenen Quadrates, so wird auch die andere Kathete die Seite des gesuchten Quadrates seyn.

Es sey nämlich in Fig. 164 AB die Seite des gegebenen Quadrates, n u. m die gegebenen Geraden, und es sey verlangt, eine Linie x zu finden, deren Quadrat sich zum gegebenen verhält, wie n : m, oder

$$x^2 : AB^2 = n : m.$$

Man ziehe nun eine unbestimmte Gerade, mache DE = m, und EF = n, beschreibe über DF einen Halbkreis, errichte in E das Perpendikel EG auf DF, und ziehe DG und FG; ferner mache man GH = AB, und ziehe HI # DF, bis sie von der Verlängerung von GF geschnitten wird, so ist GI die Seite des verlangten Quadrates.

Bew. Verlängert man GE bis K, so ist

$$IG^2 : HG^2 = KI : KH,$$
$$KI : KH = EF : ED$$

$$IG^2 : HG^2 = EF : ED, \text{ oder}$$
$$x^2 : AB^2 = n : m.$$

§. 47.

Siebenzehnte Aufgabe.

Ueber die Theilung der Figuren.

Ein Parallelogramm in mehrere gleiche Theile, oder nach einem gegebenen Verhältniß zu theilen, z. B. 1 : 2 : 3.

Auflösung. Man theile die Grundlinie nach dem gegebenen Gesetze, und ziehe durch die erhaltenen Theilungspunkte Parallellinien zur Seite, so wird das Parallelogramm nach demselben Verhältnisse getheilt. Fig. 165.

Zusatz. Ein Dreieck in mehrere gleiche Theile, oder nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen. Fig. 166.

Achtzehnte Aufgabe.

Ein beliebiges Polygon in mehrere gleiche Theile, oder nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen, z. B. 2 : 3 : 5.

Auflösung. Man berechne den Inhalt der ganzen

Figur, und daraus den jedes einzelnen Theiles, schneide von der ganzen Figur durch eine Gerade einen beliebigen beiläufig richtigen Theil ab, und berechne die Höhe eines Dreieckes, dessen Basis die erste Theilungslinie ist, und dessen Inhalt dem noch Fehlenden oder dem Ueberschusse des ersten Theiles gleich ist; dieses Dreieck bringe man so in die Figur, daß die Spitze in den Perimeter kommt, so ist der erste Theil hergestellt. Ebenso verfährt man in Bezug auf die nächsten Theile. Fig. 167.

Neunzehnte Aufgabe.

Ein Dreieck durch eine Parallellinie in zwei gleiche Theile zu theilen.

Auflösung. Da das abzuschneidende Dreieck Fig. 168 mit dem gegebenen ähnlich seyn wird, dieses aber zweimal so groß seyn soll, so hat man, wenn man die zu suchende Linie einstweilen mit DE bezeichnet

$$\triangle ABC : \triangle DEC = AB^2 : DE^2$$
$$\triangle ABC : \triangle DEC = 2 : 1$$

$AB^2 : DE^2 = 2 : 1$, wodurch diese Aufgabe auf die sechzehnte reduzirt ist.

Zwanzigste Aufgabe.

Ein Dreieck von einem im Inneren desselben gegebenen Punkte aus in drei gleiche Theile, oder nach einem gegebenen Verhältnisse zu theilen.

Auflösung. Man verwandle das Dreieck in ein anderes, welches den gegebenen Punkt zur Spitze hat, theile die neue Grundlinie und das Dreieck nach dem gegebenen Verhältnisse, und schiebe die einzelnen Ecken wieder in ihre erste Lage zurück, so hat man die verlangten Theile. Fig. 169.

§. 48.

Einundzwanzigste Aufgabe.

Ueber die ähnlichen Figuren.

Eine Figur zu zeichnen, die einer gegebenen Figur ähnlich ist.

Auflösung. Man mache alle Winkel der neuen Figur denen der gegebenen gleich, und alle Seiten proportionirt, wobei man die erste Seite, wenn nichts Näheres bestimmt ist, beliebig annehmen kann.

Man nehme nämlich in Fig. 170 von AB das beliebige Stück AF, ziehe AC und AD, ferner FG # BC, oder mache AB : AF = AC : AG, ebenso GH # CD, und HI # DE, so ist

ABCDE ∽ AFGHI.

Zusatz. Eine Figur von einem Maßstabe auf einen andern überzutragen, und das Verhältniß der beiden Figuren anzugeben.

Zweiundzwanzigste Aufgabe.

Wenn zwei ähnliche Figuren gegeben sind, eine dritte ähnliche Figur zu zeichnen, welche entweder der Summe oder der Differenz der beiden ersten Figuren gleich ist.

Auflösung. Man mache zwei gleichliegende Seiten der gegebenen Figuren zu Katheten eines rechtwinkligen Dreieckes, und zeichne über die Hypotenuse eine Figur, die den gegebenen ähnlich ist, so wird diese der Summe der beiden gegebenen Figuren gleich seyn.

Macht man aber die kleinere Seite zur Kathete und die größere zur Hypotenuse, so wird die ähnliche Figur über die gesuchte Kathete gleich seyn der Differenz der beiden gegebenen Figuren.

Dreiundzwanzigste Aufgabe.

Eine Figur zu zeichnen, die einer gegebenen Figur ähnlich ist, und sich zu ihr verhält, wie zwei gegebene Linien.

Auflösung. Da die beiden Polygone sich verhalten werden wie die Quadrate zweier Seiten, und wie die gegebenen Linien, so werden sich auch die Quadrate zweier gleichliegenden Seiten verhalten, wie die gegebenen Linien, woraus nach der sechszehnten Aufgabe die eine Seite der Figur gefunden werden kann, über welche man alsdann das ähnliche Polygon beschreibt.

Vierundzwanzigste Aufgabe.

Eine Figur zu zeichnen, die einer gegebenen Figur ähnlich, und einer andern gegebenen Figur gleich ist.

Auflösung. Man verwandle in Fig. 171 das Polygon P in ein Quadrat, dessen Seite m wird, ebenso die zweite gegebene Figur Q in ein Quadrat, dessen Seite n wird, zu m, n und AB zeichne man die vierte Proportionale, und über diese zeichne man eine Figur R, die der ersten gegebenen ähnlich ist, so wird diese auch der zweiten gleich seyn; d. h.

$$R \backsim P,$$
$$R = Q.$$

Bew. Es ist $AB : DE = m : n$, oder

$$AB^2 : DE^2 = m^2 : n^2;$$ ferner ist
$$AB^2 : DE^2 = P : R$$
$$m^2 : n^2 = P : Q$$
$$P : R = P : Q,$$ daher
$$R = Q;$$ und gemäß der Construktion ist $R \backsim P$, daher P die verlangte Figur.

Anhang.

In Bayern ist das Grundmaß der bayerische Fuß; dieser wird aber auf zweifache Weise getheilt: in 12 gleiche Theile, und ein solcher Theil heißt Duodezimal-Zoll, oder in 10 gleiche Theile, und ein solcher Theil heißt Dezimal-Zoll. Der Duodezimal-Zoll wird in 12 Duodezimal-Linien, und eine solche Linie in 12 Duodezimal-Scrupel (Punkte) getheilt. Der Dezimal-Zoll wird in 10 Dezimal-Linien, eine solche Linie in 10 Dezimal-Scrupeln (Punkte) getheilt.

Daraus ergibt sich von selbst die Eintheilung des Quadrat- und des Kubikfußes.

Folgende Tabelle enthält das Längen-, Flächen- und Körper-Maß nach der Duodezimal- und Dezimal-Eintheilung.

I. Längen-Maß.

a. Zwölftheilig.

1	12	144	1728
	1	12	144
		1	12

b. Zehntheilig.

1	10	100	1000
	1	10	100
		1	10

II. Flächen-Maß.

a. Zwölftheilig.

1	144	20736	2985984
	1	144	20736
		1	144

b. Zehntheilig.

1	100	10000	1000000
	1	100	10000
		1	100

III. Körper-Maß.

a. Zwölftheilig.

1	1728	2985984	5159780352
	1	1728	2985985
		1	1728

b. Zehntheilig.

1	1000	1000000	1000000000
	1	1000	1000000
		1	1000

Um irgend eine Angabe aus dem Duodezimal- in das Dezimal-Maß zu verwandeln und umgekehrt, braucht man nur die Angabe auf Fuß zu bringen und hierauf die Reduction im verlangten Maße vorzunehmen. Als Abkürzungsmittel kann man nachfolgende Dezimalbrüche, und die Regeln der verkürzten Multiplikation anwenden.

$$\tfrac{1}{12} = 0,\ 083\ 333\ 333\ 333.$$
$$\tfrac{1}{144} = 0,\ 006\ 944\ 444\ 444.$$
$$\tfrac{1}{1728} = 0,\ 000\ 578\ 703\ 703.$$
$$\tfrac{1}{20736} = 0,\ 000\ 048\ 225\ 308.$$
$$\tfrac{1}{2985984} = 0,\ 000\ 000\ 334\ 897.$$
$$\tfrac{1}{5159780352} = 0,\ 000\ 000\ 000\ 193.$$

Eine Fläche von 40000 □′ nennt man ein Tagwerk. Ein Tagwerk ist daher gleich einem Quadrate, dessen Seite 200′ mißt. Eine Fläche von 400 □′ nennt man eine Dezi-

male, und diese Fläche ist gleich einem Quadrate, dessen Seite 20′ enthält.

Zwölf Fuß nennt man eine Ruthe und bezeichnet sie durch 0; eine Linie von 10 Fuß heißt eine Dezimalruthe.

Eine Linie von 6 Fuß heißt eine Klafter. Davon sind die entsprechenden Quadrate und Würfel als Flächen- und Körper-Maß genommen. So z. B. heißt eine Fläche von 36□′ eine Quadrat-Klafter; ein Körper von 216 C′ eine Kubik-Klafter.

Viertes Buch.

Von den regulären Vielecken und dem Kreise.

§. 49.

Erklärung. Sind in einem Polygone alle Seiten gleich groß, und alle Winkel einander gleich, so nennt man das Polygon ein reguläres. Erklärung und Eigenschaften der regulären Polygone.

Anmerkung. Die Größe eines Winkels eines regulären Polygons findet man nach §. 15. Anm. I. durch die Formel:

$$A = \frac{(n - 2)\ 2}{n}\ R.$$

I. Zusatz. Das gleichseitige Dreieck und das Quadrat sind reguläre Figuren.

II. Zwei reguläre Polygone von gleicher Seitenzahl sind einander ähnlich.

III. Zusatz. Die Perimeter zweier regulärer Polygone verhalten sich wie zwei gleichliegende Seiten oder Diagonallinien.

IV. Zusatz. Die Inhalte zweier regulärer Polygone verhalten sich zu einander, wie die Quadrate zweier gleichliegender Seiten oder Diagonallinien.

Erster Satz. Lehrsatz.

Den Kreis kann man als ein reguläres Polygon von sehr vielen Seiten ansehen.

Bew. Es sey in Fig. 172 C der Mittelpunkt des Bogens AB, zieht man nun die Sehnen AB, AC und BC, so ist

$$\text{Bg. } AB = 2 \text{ Bg. } AC$$
$$AB < 2\, AC$$

$$\text{Bg. } AB - AB < 2\,(\text{Bg. } AC - AC) \text{ oder}$$
$$\frac{(\text{Bg. } AB - AB)}{2} < (\text{Bg. } AC - AC) \text{ d. h.}$$

Die Differenz der Hälfte eines Bogens und ihrer Sehne ist kleiner als die halbe Differenz des gegebenen Bogens und seiner Sehne.

Man sieht daraus, daß die Differenz zwischen Bogen und Sehne durch Verkleinern des erstern sehr rasch abnimmt, und daher nach Willkühr verkleinert gedacht werden kann, so daß man die Sehne dem Bogen gleich achten kann. Der Perimeter, so wie die Fläche eines regulären Polygons, wovon diese Sehne eine Seite ist, werden daher sehr nahe der Peripherie und dem Inhalte des Kreises gleich seyn; da aber in diesem Polygone außer den Seiten auch alle Winkel als Peripheriewinkel auf gleichen Bögen einander gleich seyn werden, so kann man den Kreis als ein reguläres Polygon von sehr vielen Seiten ansehen.

I. Zusatz. Alle Kreise sind einander ähnlich.

II. Zusatz. Die Peripherien zweier Kreise verhalten sich zu einander wie ihre Durchmesser, daher auch wie ihre Radien; oder das Verhältniß zwischen Peripherie und Durchmesser ist constant; d. h.

$$P : p = D : d = R : r, \text{ oder}$$

$$\frac{P}{D} = \frac{p}{d} = \text{constante Zahl.}$$

III. Zusatz. Die Flächeninhalte zweier Kreise verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Durchmesser, daher auch wie die ihrer Radien; oder: Das Verhältniß zwischen Kreisfläche und dem Quadrate des Durchmessers ist constant, d. h.

$$K : k = D^2 : d^2 = R^2 : r^2, \text{ oder}$$

$$\frac{K}{D^2} = \frac{k}{d^2}$$

Zweiter Satz. Lehrsatz.

Im Innern eines regulären Polygons gibt es einen Punkt, der von allen Seiten und Ecken gleichweit entfernt ist.

Bew. Halbirt man in Fig. 173 die beiden Winkel A und E, durch AM und EM, so schneiden sich diese zwei Linien, weil

$$\angle MAE + \angle MEA < 2R;$$

denn jeder für sich ist als die Hälfte eines Polygonswinkels kleiner als ein rechter.

Zieht man nun MB, MC und MD, so ist

in $\triangle$ MAE und $\triangle$ MAB

$$AE = AB \text{ (Dat.)}$$

$$\angle MAE = \angle MAB \text{ (constr.)}$$

$$MA = MA$$

$$\triangle MAE \cong \triangle MAB \text{ und}$$

$$ME = MB.$$

Dasselbe gilt von den andern Linien, daher ist:

$$MA = MB = MC = MD = ME.$$

Zieht man ferner MF, MG, MH, MI und MK senkrecht auf die Seiten, so ist

in $\triangle$ MAF und $\triangle$ MAG

$$\frac{\begin{array}{c} MA = MA \\ \angle MAF = \angle MAG \\ \angle MFA = \angle MGA \end{array}}{\triangle MAF \cong \triangle MAG, \text{ und}}$$

$$MF = MG.$$

Dasselbe gilt von den andern Perpendikeln, daher ist

$$MF = MG = MH = MI = MK.$$

Diese beiden Gesetze sprechen aus, daß der Punkt M

1) von allen Ecken,

2) von allen Seiten

gleich weit entfernt ist.

Anmerkung. Daraus ist klar, daß man um jedes reguläre Polygon, und in jedes reguläre Polygon einen Kreis beschreiben kann, und daß diese Kreise concentrisch sind. Ferner sieht man, daß alle Bögen des ersten Kreises einander gleich, und alle Centriwinkel gleich groß sind, und zwar jeder gleich

$$\frac{4\,R}{n}.$$

Umgekehrt heißen diese Sätze: In jeden Kreis läßt sich ein reguläres Polygon von jeder beliebigen Seitenzahl einschreiben, so wie um denselben beschreiben.

I. Zusatz. Die Perimeter zweier regulärer Polygone verhalten sich wie die Radien der umschriebenen Kreise, ihre Flächen wie die Quadrate dieser Radien.

Fig. 174.

Dat. $\begin{cases} ABCD \backsim abcd, \\ ABCD \text{ eine reguläre Figur.} \end{cases}$

Thes. $\begin{cases} Pm : pm = MA : ma, \\ F : f = MA^2 : ma^2. \end{cases}$

Bew. Es ist

in $\triangle$ ABM u. $\triangle$ abm

$\angle M = \angle m$

MA : ma = MB : mb

$\triangle$ ABM $\backsim$ $\triangle$ abm, und

AB : ab = MA : ma;

es ist aber Pm : pm = AB : ab

Pm : pm = MA : ma.

Ferner ist F : f = $AB^2 : ab^2$

$MA^2 : ma^2 = AB^2 : ab^3$

F : f = $MA^2 : ma^2$.

II. Zusatz. Der Flächeninhalt eines regulären Polygons ist gleich dem halben Produkte aus seinem Perimeter in den Radius des eingeschriebenen Kreises (in das Apothema).

Fig. 173. Dat. ABCDE regulär;

Thes. ABCDE = $\frac{1}{2}$ Pm. R.

Bew. Es ist

$\triangle$ ABM = $\frac{1}{2}$ AB . MG

$\triangle$ BCM = $\frac{1}{2}$ BC . MG

$\triangle$ CDM = $\frac{1}{2}$ CD . MG

$\triangle$ DEM = $\frac{1}{2}$ DE . MG

$\triangle$ EAM = $\frac{1}{2}$ EA . MG

F = $\frac{1}{2}$ Pm. R.

III. Zusatz. Der Flächeninhalt eines Kreises ist gleich dem halben Produkte aus seiner Peripherie in den Radius.

---

§. 50.

Dritter Satz. Aufgabe.

In einen Kreis ein Quadrat einzuschreiben. Construktion der ein- und umschriebenen regulären Vielecke.

Auflösung. Man ziehe zwei Durchmesser, die auf einander senkrecht stehen, so entstehen um den Mittelpunkt

vier rechte Winkel, daher ist die zugehörige Sehne die Seite des verlangten Quadrates. Fig. 175.

Zusatz. Nach dem Pythagorischen Lehrsatze ist

$$AB^2 = 2\ BM^2, \text{ oder}$$

$$AB^2 : BM^2 = 2 : 1, \text{ oder}$$

$$AB : BM = \sqrt{2} : 1 \text{ d. h.}$$

Die Seite des eingeschriebenen Quadrates verhält sich zum Radius, wie die Quadratwurzel aus 2 zur Einheit.

Vierter Satz. Aufgabe.

In einen Kreis ein reguläres Sechseck einzuschreiben.

Auflösung. Man stelle im Mittelpunkte einen Winkel her, der der sechste Theil von vier rechten ist, d. h. der gleich ist $\frac{4}{6}$ R = $\frac{2}{3}$ R, welchen ein Winkel eines gleichseitigen Dreieckes verstellt, so ist die Sehne die Seite des Sechseckes. Fig. 176.

I. Zusatz. Die Seite des eingeschriebenen regulären Sechseckes ist dem Radius gleich.

Bew. Aus der Gleichheit der drei Winkel des Dreieckes ABM folgt die Gleichheit der drei Seiten, daher ist AB = AM.

II. Zusatz. Die Sehne, die dem Radius gleich ist, ist eine Seite des Sechseckes.

Fig. 176. Dat. $AB = AM$;
Thes. $\angle AMB = \frac{2}{3} R = 60^\circ$.

Bew. Es ist

$$\angle A + \angle B + \angle M = 2\ R$$

$$\angle M = \tfrac{2}{3}\ R$$

$$\overline{\angle A + \angle B = \tfrac{4}{3}\ R.}$$

Ferner ist $\angle A = \angle B$

$$\overline{\angle A = \angle B = \angle M = \tfrac{2}{3}\ R,}$$

d. h. AB ist die Seite des eingeschriebenen regulären Sechseckes.

Fünfter Satz. Aufgabe.

In einen Kreis ein reguläres Zehneck zu beschreiben.

Auflösung. Man theile den Radius nach dem mittlern und äußern Verhältniße, trage den größern Theil als Sehne auf, so ist diese die Seite des verlangten Zehneckes.

Man ziehe nämlich in Fig. 177 den Radius MA, errichte in A das Perpendikel AB $= \frac{1}{2}$ MA, ziehe die Hypotenuse MB, subtrahire davon BA, trage den Rest MC auf MA, so daß ME $=$ MC wird, so ist E der verlangte Theilungspunkt auf dem Radius. Trägt man nun ME als Sehne auf, nämlich macht man AF $=$ ME, so ist AF die Seite des regulären Zehneckes im Kreise.

Fig. 177. Dat. AM : AF $=$ AF : AE;
Thes. Bg. AF $= \frac{1}{10}$ P.

Bew. Zieht man MF und FE, so ist in

$$\triangle \text{ AMF u. } \triangle \text{ AFE}$$
$$\angle \text{MAF} = \angle \text{EAF}$$
$$\text{AM : AF} = \text{AF : AE}$$

$$\triangle \text{ AMF} \backsim \triangle \text{ AFE, und}$$
$$\angle \text{AMF} = \angle \text{AFE,}$$
$$\text{MA : FA} = \text{MF : FE, und daraus}$$
$$\text{FA} = \text{FE und} = \text{ME.}$$

Es sind daher die Dreiecke AMF, AFE und FEM gleichschenklig und

$$\angle x = \angle y = \angle z \text{ und}$$
$$\angle u = \angle y + \angle x.$$

Es ist nun

$$\angle v + \angle x + \angle y + \angle z = 2\ R \text{ oder}$$
$$\angle y + \angle z + \angle x + \angle y + \angle z = 2\ R \text{ oder}$$
$$\angle x + \angle x + \angle x + \angle x + \angle x = 2\ R \text{ oder}$$
$$5 \angle x = 2\ R \text{ oder}$$
$$\angle x = \tfrac{2}{5} R = 36^0,$$

d. h. **AF** ist die Seite des eingeschriebenen regulären Zehneckes.

I. Anmerkung. Gauß hat in seinem Werke „Disquisitiones arithmeticae" bewiesen, daß man mit den Mitteln der Elementar-Geometrie, oder durch die Gleichungen des ersten und zweiten Grades jedes Polygon in den Kreis einschreiben kann, dessen Seitenzahl durch $2^n - 1$ ausgedrückt, und zugleich eine Primzahl ist. Indeß sind obige drei Polygone von den unmittelbar konstruirbaren die einfachsten und ältesten.

Aus diesen Polygonen können eine Menge andere durch Halbiren der Centriwinkel, z. B. das 8, 16, 32 . . . . Eck, das 12, 24, 48 . . . . Ecke das 20, 40, 80 . . . . Eck konstruirt und berechnet werden. Durch Verbinden zweier Bögen mit einer einzigen Sehne lassen sich das Fünfeck und Dreieck bilden. Durch Subtraktion des Zehneck-Bogens vom Sechseck-Bogen entsteht der fünfzehnte Theil des Kreises, nämlich $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$.

Zur Berechnung obiger Polygone dient folgende Aufgabe:

I. Zusatz. Aus dem Radius und einer Sehne die Sehne des halben Bogens zu finden; oder:

Aus dem Radius und der Seite des regulären n Eckes die Seite des regulären 2n Eckes zu finden und umgekehrt.

Auflösung. Es sey Fig. 178 r der Radius, AB = a die Seite eines regulären Polygons und AC = b die Sehne des halben Bogens oder die Seite eines regulären Polygons von doppelter Seitenzahl, so ist

$$AC^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2 + DC^2,$$

$$= \frac{AB^2}{4} + (MC - DM)^2,$$

$$= \frac{AB^2}{4} + MC^2 - 2\,MC\,.\,DM + DM^2,$$

$$= \frac{a^2}{4} + r^2 - 2\,r\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} + r^2 - \frac{a^2}{4},$$

$$= 2\,r^2 - \frac{2\,r\sqrt{4\,r^2 - a^2}}{2},$$

$$AC = \sqrt{r\,(2\,r - \sqrt{4\,r^2 - a^2})}.$$

Um a zu finden, wenn b gegeben ist, hat man:

$$b^2 - 2\,r^2 = -\,r\sqrt{4r^2 - a^2}$$

$$b^4 - 4\,b^2\,r^2 + 4\,r^4 = 4\,r^4 - a^2\,r^2$$

$$a^2\,r^2 = 4\,b^2\,r^2 - b^4$$

$$a^2 = \frac{b^2}{r^2}\,(4\,r^2 - b^2)$$

$$a = \frac{b}{r}\sqrt{4\,r^2 - b^2}.$$

II. Anmerkung. Zur unmittelbaren Herstellung des ein- und umschriebenen regulären Dreieckes dienen folgende allgemeinere Aufgaben:

II. Zusatz. In einen Kreis ein Dreieck einzuschreiben, welches einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist.

Auflösung. Man ziehe in Fig. 179 im Punkte D die Tangente EDF, mache $\angle$ GDF $=$ $\angle$ ABC, und $\angle$ HDE $=$ $\angle$ CAB, und zieht HG, so ist $\triangle$ DHG, das verlangte.

Bew. Es ist

$$\angle DHG = \angle GDF = \angle ABC,$$
$$\angle DGH = \angle HDE = \angle CAB$$

daher $\triangle$ DHG $\backsim$ $\triangle$ ABC.

III. Zusatz. Um einen Kreis ein Dreieck zu beschreiben, welches einem gegebenen ähnlich ist.

Auflösung. Man verlängere in Fig. 180 AB auf beiden Seiten, mache $\angle$ FMG $= \angle$ DAC u. $\angle$ GMH $= \angle$ CBE, und ziehe die Tangenten IK, KL und IL, so ist

$$\triangle IKL \backsim \triangle ABC.$$

Bew. Es ist

$$\angle FMG + \angle FKG = 2 R,$$
$$\angle DAC + \angle CAB = 2 R,$$
$$\angle FMG + \angle FKG = \angle DAC + \angle CAB,$$

oder $\angle$ FKG $= \angle$ CAB. Ebenso kann gezeigt werden $\angle$ HLG $= \angle$ CBA

$$\triangle IKL \backsim \triangle ABC.$$

Sind nun die gegebenen Dreiecke regulär, so werden es auch die auf diese Weise konstruirten.

Sechster Satz. Aufgabe.

Wenn ein eingeschriebenes regelmäßiges Vieleck gegeben ist, um den nämlichen Kreis ein ähnliches Vieleck zu beschreiben.

I. Auflösung. Man ziehe in Fig. 181 durch D, dem Mittelpunkte von Bg. AB, eine Tangente, bis sie von den verlängerten Radien in E und F geschnitten wird, so hat man eine Seite des verlangten Polygons. Verlängert man ebensoweit MC bis G, und zieht FG, so tangirt diese den Kreis, und ist die zweite Seite des verlangten Polygons; so fahre man fort, bis das Polygon geschlossen ist, welches alsdann das verlangte seyn wird.

Bew. Es ist in

$\triangle$ MEF und $\triangle$ MFG

MF = MF

ME = MG

$\angle$ EME = $\angle$ GMF

$\triangle$ MEF $\cong$ MFG $\cong$ MGI.....

EF = FG = GI ..... d. h. alle Seiten sind gleich.

Ferner ist

$\angle$ EFM = $\angle$ MGI

$\angle$ MFG = $\angle$ MGF

$\angle$ EFG = $\angle$ FGI.... d. h. alle Winkel gleich.

Es ist auch in

$\triangle$ MDF und $\triangle$ MHF, wenn man MH senkrecht auf FG zieht:

MF = MF

$\angle$ DMF = $\angle$ HMF $(= \frac{1}{2}$ EMF)

$\angle$ D = $\angle$ H (= R)

$\triangle$ MDF $\cong$ $\triangle$ MHF und

MD = MH = MK .... d. h. alle Seiten sind Tangenten an den Kreis.

Da nun in den beiden Polygonen alle Seiten und Winkel einander gleich, und zwar im zweiten Polygone ebensoviele sind, wie im ersten, und überdieß alle Seiten Tangenten an den gegebenen Kreis sind, so ist das neue Polygon um den Kreis beschrieben, und dem gegebenen ähnlich, was verlangt war.

II. **Auflösung.** Man errichte in Fig. 182 in A die Tangente, halbire die Winkel AMB und AMC, so ist FE eine Seite des verlangten Polygons. Halbirt man ferner $\angle$ CMD, macht MG = MF, und zieht FG, so hat man

die zweite Seite des verlangten Polygons, und durch dieselbe fortgesetzte Construktion zuletzt das ganze Polygon. Aus der Congruenz der gleichschenkligen Dreiecke FME, FMG u. s. f. folgt, daß alle Seiten den Kreis tangiren, alle diese Seiten einander gleich, und alle Winkel einander gleich sind, und da ferner die Anzahl der Seiten im neuen Polygon dieselbe ist, wie im gegebenen, so erhält man auf diese Weise das verlangte Polygon.

Zusatz. In Fig. 181 ist

$$AB : EF = MN : MD$$

$$a : b = \sqrt{r^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} : r, \text{ oder}$$

$$a : b = \sqrt{4\ r^2 - a^2} : 2\ r, \text{ und daraus}$$

$$a = \frac{b}{2r}\sqrt{4\ r^2 - a^2}, \text{ und}$$

$$b = \frac{2\ ar}{\sqrt{4\ r^2 - a^2}}.$$

---

§. 51.

Siebenter Satz. Aufgabe.

Berechnung des Verhältnisses zwischen Peripherie und Durchmesser, der Peripherie, des Kreises und dessen Theile.

Wenn die Flächeninhalte eines regelmäßigen eingeschriebenen, und des ähnlichen umschriebenen Vieleckes gegeben sind, die Flächeninhalte des ein- und umschriebenen Vieleckes von doppelter Seitenzahl zu finden.

Auflösung. Es sey in Fig. 183 AB eine Seite des regulären eingeschriebenen Vieleckes, so ist △ ABM der sovielte Theil des Flächeninhaltes, als das Polygon Seiten hat, deren Anzahl wir durch n ausdrücken wollen; der Flächeninhalt des Polygons sey durch A dargestellt. Alsdann ist auch

DE eine Seite des umschriebenen ähnlichen Vieleckes, und △ DEM der ebensovielte Theil des Polygons, wie oben, dessen Fläche wir B nennen wollen. Zieht man nun MC senkrecht auf AB, und zieht AF, so ist AF eine Seite des eingeschriebenen Vieleckes von doppelter Seitenzahl, die durch 2 n vorgestellt ist, △ AFM ist der 2 nte Theil des Flächeninhalts, den wir durch A′ vorstellen. Halbirt man nun durch MG und MH die Winkel DMF und EMF, so ist GH eine Seite des umschriebenen Vieleckes von doppelter Seitenzahl, da ∠ GMH = ∠ AMF ist, die ebenfalls 2 n beträgt, und GMH ist der 2 nte Theil des Polygons, dessen Fkäche durch B′ dargestellt sey.

Es ist also:

$$\triangle\, ABM = \frac{A}{n},\quad \triangle\, ACM = \frac{A}{2\,n}$$

$$\triangle\, DEM = \frac{B}{n},\quad \triangle\, DFM = \frac{B}{2n}$$

$$\triangle\, AFM = \frac{A'}{2\,n},$$

$$\triangle\, GHM = \frac{B'}{2n},\quad \triangle\, GFM = \frac{B'}{4\,n}.$$

Nun ist

$$\triangle\, ACM : \triangle\, AFM = MC : MF$$

$$\triangle\, AFM : \triangle\, DFM = MA : MD$$

$$\triangle\, ACM : \triangle\, AFM = \triangle\, AFM : \triangle\, DFM$$

$$\frac{A}{2n} : \frac{A'}{2\,n} = \frac{A'}{2n} : \frac{B}{2n'}, \text{ oder}$$

$$A : A' = A' : B,$$

$$A' = \sqrt{A\,.\,B};\ \text{d. h.}$$

Der Flächeninhalt des eingeschriebenen Vieleckes von doppelter Seitenzahl ist das geometrische

Mittel aus den Inhalten des ein- und umschriebenen Vieleckes von einfacher Seitenzahl.

Ferner ist

$$\triangle DGM : \triangle GFM = DG : GF$$
$$= MD : MF$$
$$= MA : MC$$
$$= MF : MC$$
$$= \triangle AFM : \triangle ACM$$

oder $\triangle GFM : \triangle DFM = \triangle ACM : \triangle ACM + \triangle AFM$,

$$\frac{B'}{4n} : \frac{B}{2n} = \frac{A}{2n} : \frac{A + A'}{2n} \text{ oder}$$

$$B' : 2B = A : A + A', \text{ oder}$$

$$B' = \frac{2AB}{A + A'}.$$

Anmerkung. Betrachtet man z. B. das ein- und umschriebene Quadrat in einem Kreise mit dem Radius gleich der Einheit, so ist der Inhalt des innern = 2, der des äußern = 4. Zugleich sieht man, daß durch Vervielfältigung der Vielecke die Fläche des äussern sich verkleinert, die des innern sich vergrößert, und sie so allmählich, da das eine größer, das andere aber kleiner ist als der Kreis, dem Kreise bis auf ein Beliebiges nahe kommen.

Achter Satz. Aufgabe.

Berechnung des Verhältnisses zwischen Peripherie und Durchmesser, der Vielecke, des Kreises und dessen Theile.

Die Fläche des Kreises, dessen Radius der Einheit gleich ist, annähernd zu berechnen.

Auflösung. Nimmt man hiezu das ein- und umschriebene Quadrat, deren Flächen man leicht bestimmen kann, und die 2 und 4 sind, als Anfang, und berechnet daraus nach obigen Formeln das ein- und umschriebene Achteck, so ist

$$A' = \sqrt{2 . 4} = \sqrt{8} = 2,8284271, \text{ und}$$

$$B' = \frac{2 . 2 . 4}{2 + \sqrt{8}} = \frac{16}{4,8284271} = 3,3137085.$$

Diese beiden Resultate kann man wieder ebenso benützen, um die 16 Ecke, diese um die 32 Ecke u. s. w. zu finden.

Nachstehende Zahlen sind die Flächeninhalte dieser Vielecke bis auf die siebente Dezimalstelle:

Zahl der Seiten		Eingeschriebenes Vieleck		Umschriebenes Vieleck
4	—	2,0000000	—	4,0000000
8	—	2,8284271	—	3,3137085
16	—	3,0614674	—	3,1825979
32	—	3,1214451	—	3,1517249
64	—	3,1365485	—	3,1441184
128	—	3,1403311	—	3,1422236
256	—	3,1412772	—	3,1417504
512	—	3,1415138	—	3,1416321
1024	—	3,1415729	—	3,1416025
2048	—	3,1415877	—	3,1415951
4096	—	3,1415914	—	3,1415933
8192	—	3,1415923	—	3,1415928
16384	—	3,1415925	—	3,1415927
32768	—	3,1415926	—	3,1415926

Da nun der Kreis stets zwischen den beiden Flächen enthalten ist, so ist

$$k = 3{,}1415926 = \pi.$$

I. Zusatz. Die Peripherie dieses Kreises ist gleich $2\,\pi$.

Bew. Da der Inhalt eines Kreises gleich ist dem halben Produkte aus der Peripherie in den Radius, so ist

$$\tfrac{1}{2}\,p = 3{,}1415926$$

$$p = 2\,\pi.$$

Anmerkung. Die gefundene Zahl bedeutet also die halbe Peripherie eines Kreises, dessen Radius gleich 1 ist.

II. Zusatz. Das Verhältniß zwischen Peripherie und Durchmesser eines Kreises ist gleich π.

Bew. Da das Verhältniß zwischen Peripherie und Durchmesser für alle Kreise gleich ist, so ist

$$\frac{P}{D} = \frac{p}{d} = \frac{2\pi}{2} = \pi.$$

Anmerkung. Diese Zahl heißt von ihrem Erfinder die Ludolphische Zahl, und wird allgemein durch obigen griechischen Buchstaben dargestellt; sie bezeichnet den Inhalt eines Kreises, dessen Radius 1 ist. Man hat die Geduld gehabt, diese Zahl bis auf Einhundert und vierzig Dezimalstellen zu berechnen. Da sie ohne Ende fortgeht und nicht periodisch wird, so sind der Kreis und das Quadrat über den Radius incommensurabel (irrational).

Um diese Zahl annähernd in einen gemeinen Bruch zu verwandeln, hat man:

$$3{,}14159 = 3\tfrac{14159}{100000}, \text{ und daraus}$$

$$100000 : 14159 = 7 + \tfrac{887}{14159}$$

$$14159 : 887 = 15 + \tfrac{854}{887}$$

$$887 : 854 = 1 + \tfrac{33}{854}$$

$$854 : 33 = 25 + \text{—}$$

7 ,	15 ,	1 ,	25

1	0	1	15	16
0	1	7	106	113, daher

$$3{,}14159 = 3\tfrac{1}{7} = \tfrac{22}{7}$$

$$= 3\tfrac{16}{113} = \tfrac{355}{113}, \text{ und}$$

$$D : P = 7 : 22 \text{ oder } 113 : 355.$$

Neunter Satz. Lehrsatz.

Jede Kreisfläche ist gleich dem Produkte aus dem Quadrate des Radius in die Ludolphische Zahl; oder dem vierten Theile aus dem Produkte des Durchmessers in die Ludolphische Zahl.

Thes. $K = R^2\pi = \frac{1}{4} D^2\pi.$

Bew. Da sich zwei Kreisflächen zu einander verhalten wie die Quadrate ihrer Radien oder Durchmesser, so ist

$$K : \pi = R^2 : 1 = D^2 : 2^2,$$ und daraus

$$K = R^2\pi;$$ oder

$$K = \tfrac{1}{4} D^2\pi.$$

Zehnter Satz. Lehrsatz.

Der Umfang eines Kreises ist gleich dem doppelten Produkte aus dem Radius in die Ludolphische Zahl; oder dem Produkte aus dem Durchmesser in die Ludolphische Zahl.

Thes. $P = 2\pi = D\pi$.

Bew. Da sich die Peripherien zu einander verhalten, wie ihre Radien oder Durchmesser, die Peripherie eines Kreises, dessen Radius gleich der Einheit ist, aber 2π beträgt, so ist

$$P : 2\pi = R : 1 = D : 2,$$ und daraus

$$P = 2R\pi;$$ oder

$$P = D\pi.$$

I. Zusatz. Einen Bogen zu berechnen, für welchen der Centriwinkel bekannt ist.

Auflösung. Es ist

$$B : P = n^0 : 360^0,$$ und daraus

$$B = 2\,R\pi\,\frac{n}{360}.$$

II. Zusatz. Den Ring zweier concentrischen Kreise zu berechnen.

Auflösung. Man betrachte den Ring als die Differenz der beiden Kreise, oder als ein Trapez, dessen parallele Sei-

ten die beiden Peripherien und dessen Höhe die Differenz der beiden Radien ist, so ist

$$\mathfrak{R} = R^2\pi - r^2\pi = (R - r)(R + r)\pi; \text{ oder}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{(P + p)(R - r)}{2} = \frac{(2R\pi + 2r\pi)(R - r)}{2}$$

$$= \frac{2(R + r)(R - r)}{2}\pi \text{ oder}$$

$$\mathfrak{R} = (R + r)(R - r)\pi.$$

III. Zusatz. Den Sektor zu berechnen, wenn der Centriwinkel bekannt ist.

Auflösung. Man betrachte den Sektor, entweder im Verhältnisse zum Kreise, oder als Dreieck, dessen Basis die Länge des Bogens, und dessen Höhe der Radius ist, so ist

$$S : K = n^0 : 360^0, \text{ und daraus}$$

$$S = R^2\pi \frac{n}{360}; \text{ oder}$$

$$S = \frac{2R\pi}{2}\frac{n}{360} . R, \text{ und daraus}$$

$$S = R^2\pi \frac{n}{360}.$$

IV. Zusatz. Den Flächeninhalt eines Segmentes anzugeben.

Auflösung. Man berechne den Sektor und das Dreieck, und ziehe letzteres ab.

V. Zusatz. Den Flächeninhalt einer Kreis-Zonne, d. h. eines Kreisstückes zwischen zwei Sehnen zu berechnen.

Auflösung. Man berechne die beiden Segmente, und ziehe ihre Inhalte von einander ab.

§. 52.

Erklärung. Betrachtet man den Kreis, annähernd einem Polygon von sehr vielen Seiten, so läßt sich mit Anwendung der Formel des §. 51. Anmerk. I. der Perimeter eines solchen Polygons leicht finden, indem man z. B. in einem Kreise, dessen Radius gleich der Einheit ist, vom Sechs-Eck ausgeht und durch Verdoppeln fortschreitet bis zum regulären 1536 Eck, dessen Seite gleich wird Berechnung der Peripherie als Grenze der Polygone.

$$\sqrt{(2-\sqrt{(2+\sqrt{(2+\ldots\sqrt{(2+\sqrt{(2+\sqrt{3})})})})})}$$

und diese Seite mit der Anzahl multiplizirt; die Fläche dieses Kreises ist alsdann gleich der halben Peripherie. Mit Anwendung der Sätze, daß sich die Peripherien der Kreise verhalten wie ihre Radien oder Durchmesser, die Kreisflächen aber wie die Quadrate ihrer Radien oder Durchmesser, findet man alsdann die Formeln für die Länge irgend einer Peripherie und die Grösse ihres Kreises.

Verschmäht man diese Betrachtung, so kann man in obiger Berechnung des Kreises, wo er als die Grenze zweier Vielecke betrachtet wurde anstatt die Einheit zum Radius zu nehmen, diesen allgemein als R bezeichnen, und man findet ebenso

$$K = R^2\pi;$$

daher ist für einen andern Radius

$$k = r^2\pi,$$

aus welchen beiden Formeln zugleich das Verhältniß zweier Kreisflächen folgt, nämlich

$$K : k = R^2 : r^2.$$

In diesem Falle ist aber auch eine unmittelbare Herleitung für den Werth der Peripherie nothwendig, den wir dadurch finden, daß wir mit obigen Formeln die Perimeter eines ein- und umschriebenen Polygons finden, die in so vielen Dezimalstellen übereinstimmen, so viele wir für die Peripherie wollen. Vorerst ist aber noch folgender Satz zu beweisen.

Eilfter Satz. Lehrsatz.

Jeder Kreisumfang ist grösser als der Perimeter eines eingeschriebenen, und kleiner als der Perimeter eines umschriebenen Polygons.

Bew. Betrachtet man den Kreisbogen, den eine Seite eines eingeschriebenen regulären Polygons abschneidet, und dessen Enden in den zwei Mittelpunkten zweier auf einander folgenden Seiten des ähnlichen umschriebenen Polygons liegen wie in Fig. 182, so ist:

Erstens der Bogen grösser als die Sehne, weil die Gerade die kürzeste Entfernung zweier Punkte ergibt.

Zweitens sind die beiden halben Seiten des ähnlichen umschriebenen Polygons zusammen grösser als der zwischenliegende Kreisbogen.

Denn zieht man die beliebige PQ so, daß sie ausser dem Bogen liegt, oder ihn höchstens berührt, so ist

$$PQ < PF + FQ, \text{ daher}$$

$$CP + PQ + QA < CF + FA, \text{ d. h.}$$

eine umfassende Linie ist nicht die kleinste, wenn man zwischen ihr und dem Bogen noch eine Gerade von irgend einer Länge ziehen kann, daher muß die kleinste umfassende Linie mit dem Bogen selbst zusammenfallen, oder

$$\text{Bg. } AC < CF + FA, \text{ oder}$$

$$\text{Bg. } CA < FE.$$

Da nun jeder Bogen grösser ist als die Seite des eingeschriebenen regulären Polygons, und kleiner als die Seite des umschriebenen Polygons, so ist auch die Peripherie des Kreises grösser als der Perimeter eines ein- und kleiner als der Perimeter eines umschriebenen Polygons.

Zwölfter Satz. Aufgabe.

Die Peripherie eines Kreises zu bestimmen, dessen Radius gleich der Einheit ist.

Auflösung. Aus dem Satze: „die Seite des eingeschriebenen regulären Sechseckes ist gleich dem Radius" sehen wir, daß die Seite des Sechseckes gleich 1 ist. Mit Anwendung der Aufgabe: „Aus dem Radius und der Seite des eingeschriebenen n Eckes, die Seite des eingeschriebenen 2n Eckes zu finden" finden wir zunächst die Seite des 12 Eckes, daraus die Seite des 24 Eckes, u. s. w.

Hier folgen die Resultate:

Anzahl der Seiten.	Grösse der Seiten.
6	1,00000000
12	0,51763809
24	0,26105238
48	0,13080626
96	0,06543817
192	0,03272346
384	0,01636227
768	0,00818121
1536	0,00409061.

Berechnet man nun mit Anwendung der Aufgabe: „Aus dem Radius und der Seite des eingeschriebenen regulären n Eckes, die Seite des umschriebenen n Eckes zu finden," die Seite des umschriebenen regulären 1536 Eckes, so findet man

0,00409062.

Das arithmetische Mittel

0, 004090615

gibt den Werth des 1536sten Theiles der Peripherie, daher ist die Peripherie selbst

6,283185.

I. Zusatz. Das Verhältniß der Peripherie zum Durchmesser zu finden.

Auflösung. Im obigen Kreise ist der Radius = 1, daher der Durchmesser D = 2, und die Peripherie wurde gefunden = 6,283185, daher ist

$$\frac{P}{D} = 3,141592.$$

Anmerkung. Auf diese Weise wurde das obige Verhältniß zuerst von Ludolph von Ceuln gefunden.

Er fand nämlich:

3,14159265358979323846 . . .

II. Zusatz. Sucht man auf diese Weise die Peripherie eines Kreises für einen beliebigen Durchmesser, so findet man

$P = 3,\ 14159\ D$, und ebenso für einen

zweiten Kreis $p = 3,\ 14159\ d$, daraus ist

$$P : p = D : d.$$

Es ist daher nicht nöthig, der Kreis als Polygon zu betrachten.

III. Zusatz. Aus Obigem die Fläche des Kreises und deren Theile zu berechnen.

Auflösung. Man betrachtet den Kreis als Aggregat von Dreiecken, die die kleinen Theile der Peripherie zu Grundlinien und den Radius zur Höhe haben; da aber mehrere Dreiecke von gleicher Höhe gleich sind einem einzigen Dreiecke von derselben Höhe und der Summe der Grundlinien, so ist der Kreis gleich einem Dreiecke, welches die Peripherie zur Basis und den Radius zur Höhe hat.

IV. Zusatz. Jede Kreisfläche ist gleich dem halben Produkte aus der Peripherie in den Radius; oder dem vierten Theile des Produktes aus der Peripherie in den Durchmesser.

Thes. $K = \frac{1}{2} PR = \frac{1}{4} PD$.

Bew. Es ist

$$K = R^2\pi = R \cdot R\pi = \frac{R \cdot 2R\pi}{2} \text{ oder}$$

$$K = \frac{1}{2} PR\text{; ferner ist}$$

$$K = \frac{1}{4} D^2\pi = \frac{1}{4} D \cdot D\pi\text{, oder}$$

$$K = \frac{1}{4} PD.$$

Anmerkung. Die Aufgabe: Den Kreis zu quadriren, d. h. ein Quadrat zu zeichnen, das einem gegebenen Kreise gleich ist, hat die Mathematiker schon vielfach beschäftigt, und bleibt so lange unmöglich, bis man die Peripherie des Kreises, die in Bezug auf den Radius incommensurabel (irrational), durch eine gerade Linie genau darstellen lernt.

§. 53.

Erklärung. Wir wollen nun noch eine andere Methode für die Berechnung des Kreises mit den dazu nöthigen Sätzen folgen lassen. Eine andere Methode der Berechnung des Kreises.

Dreizehnter Satz. Lehrsatz.

Wenn zwei Dreiecke, ein ungleichseitiges und ein gleichschenkliges, so beschaffen sind, daß jede der beiden gleichen Seiten die mittlere Proportionallinie zwischen zwei Seiten des andern Dreiecks ist, und die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel einander gleich sind, so sind die Dreiecke selbst einander gleich.

Fig. 183. Dat. $\begin{cases} \angle C = \angle F, \\ DF = EF, \\ AC : DF = DF : BC; \end{cases}$

Thes. $\triangle ABC = \triangle DEF.$

Bew. Es ist

$$\triangle ABC : \triangle DEF = AC \,.\, BC : DF \,.\, EF, \text{ oder}$$
$$\triangle ABC : \triangle DEF = AC \,.\, BC : DF^2, \text{ ferner ist}$$
$$DF^2 = AC \,.\, BC \text{ (Dat.)}$$

$$\triangle ABC = \triangle DEF.$$

Zusatz. Ist das ungleichseitige Dreieck rechtwinkel, der gleiche Winkel aber spitz, so ist die Höhe des gleichschenkligen Dreieckes die mittlere Proportionale zwischen der dem Winkel anliegenden Kathete und der halben Summe aus dieser Kathete und der Hypotenuse.

Fig. 184. Dat. $\begin{cases} \angle A = \angle F = R, \\ DC = EC; \end{cases}$

Thes. $AC : CF = CF : \dfrac{AC + BC}{2}$, oder

$$CF^2 = AC \left(\frac{AC + BC}{2}\right)$$

Bew. Der Perpendikel CF halbirt den Winkel C, daher ist

$$AG : BG = AC : BC, \text{ daraus}$$
$$AG : AB = AC : AC + BC;$$
$$\text{ferner ist } AG ; AB = \triangle AGC : ABC, \text{ oder}$$
$$AG : AB = \triangle AGC : \triangle DEC, \text{ oder}$$
$$AG : AB = \triangle AGC : 2 \triangle DFC$$

$$\triangle AGC : \triangle 2DFC = AC : AC + BC, \text{ oder}$$
$$\triangle AGC : \triangle DFC = AC : \frac{AC + BC}{2}.$$

Endlich ist

$$\triangle AGC : \triangle DFC = AC^2 : CF^2 \ (\triangle AGC \backsim \triangle DFC)$$

$$AC^2 : CF^2 = AC : \frac{AC + BC}{2}, \text{ oder}$$

$$AC : CF^2 = AC : AC\left(\frac{AC + BC}{2}\right), \text{ daher}$$

$$CF^2 = AC\left(\frac{AC + BC}{2}\right).$$

Vierzehnter Satz. Aufgabe.

Einen Kreis zu finden, der so wenig, als man will, von einem gegebenen regelmässigen Vielecke verschieden ist.

Auflösung. Es sey in Fig. 185 z. B. das BMNP gegeben. Man fälle aus dem Mittelpunkte C auf die Seite MB die senkrechte Linie CA, und ziehe CB.

Der mit dem Halbmesser CA beschriebene Kreis ist in das Quadrat eingeschrieben, und der Kreis, vom Halbmesser CB, ist um dasselbe beschrieben. Der erste Kreis ist kleiner, als das Quadrat, der zweite grösser. Diese Grenzen dürfen also nur enger zusammen gezogen werden.

Man setze CD und CE gleich der mittlern Proportionale zwischen CA und CB, und ziehe ED; so ist das gleichschenklige Dreieck CDE dem Dreiecke CAB gleich. Man verfahre auf eben die Weise mit allen acht Dreiecken im Quadrate; so entsteht ein regelmäßiges Achteck, welches so groß ist, als das Quadrat BMNP. Der mit dem Halbmesser CF, der mittlern Proportionale zwischen CA und $\frac{CA + CB}{2}$, beschriebene Kreis aber ist in das Achteck eingeschrieben, und der Kreis vom Halbmesser CD um dasselbe beschrieben. Also ist der erste kleiner, der zweite größer, als das Quadrat.

Verwandelt man, auf dieselbe Weise, das rechtwinklige Dreieck CDF in ein gleich großes, gleichschenkliges Dreieck; so entsteht ein regelmäßiges Vieleck von 16 Seiten, welches dem Quadrate an Inhalt gleich ist. Der in dieses Vieleck eingeschriebene Kreis ist kleiner, der umschriebene größer, als das Quadrat.

So kann man fortfahren, bis der um- und der eingeschriebene Kreis so wenig von einander abweichen, als man will. Alsdann können beide dem Quadrat gleich gesetzt werden.

Die Berechnung der auf einander folgenden Halbmesser ist folgende. Es sei a der Halbmesser des, in eines der bekannten Vielecke eingeschriebenen, Kreises; b der Halbmesser des Kreises um das nämliche Vieleck, a′ und b′ sollen die Halbmesser für das folgende Vieleck mit der doppelten Seitenzahl, seyn. Dem Obigen zufolge ist b′ die mittlere Proportionale zwischen a und b, und a′ die mittlere Proportionale zwischen a und $\frac{a+b}{2}$, so, daß

$$b' = \sqrt{(a \times b)} \text{ und } a' = \sqrt{\left[a \times \left(\frac{a+b}{2}\right)\right]}.$$

Sind also die Halbmesser a und b bekannt, so findet man die Halbmesser a′ und b′ des folgenden Vielecks, und man kann damit fortfahren, bis der Unterschied der beiden Halbmesser unmerklich ist; alsdann ist der eine, wie der andere Halbmesser, derjenige eines Kreises, welcher so groß ist, als das gegebene Quadrat oder Vieleck.

Dieses Verfahren ist zwar auch in Linien leicht auszuführen, weil man nur, der Reihe nach, die mittleren Proportionalen zwischen bekannten Linien suchen darf; aber noch leichter in Zahlen. Das Verfahren ist unter denen, welche die Elementar-Geometrie darbietet, eins der bequemsten, um schnell das Verhältniß des Umfanges zum Durchmesser näherungsweise zu finden. Die Seite des Quadrats sei 2; so

ist der erste eingeschriebene Halbmesser CA = 1; der erste umgeschriebene Halbmesser CB = $\sqrt{2}$, oder 1,4142136. Macht man also a = 1 und b = 1,4142136, so findet man b′ = 1,1892071 und a′ = 1,0986841. Diese Zahlen dienen, die folgenden, nach demselben Gesetze, zu berechnen.

Folgendes ist das Resultat der Rechnung bis auf 7 oder 8 Decimalstellen, vermittelst der gewöhnlichen Logarithmentafeln.

Halbmesser der umschriebenen Kreise.				Halbmesser der eingeschriebenen Kreise.
1,4142136	—	—	—	1,0000000
1,1892071	—	—	—	1,0986841
1,1430500	—	—	—	1,1210863
1,1320149	—	—	—	1,1265639
1,1292862	—	—	—	1,1278257
1,1286063	—	—	—	1,1282657

Von hier ab, wo die erste Hälfte der Ziffern auf beiden Seiten die nämliche ist, kann man, statt der geometrischen Mittelzahlen, die arithmetischen nehmen, weil solche nur in höheren Decimalstellen von jenen verschieden sind. Dadurch wird die Rechnung abgekürzt, und die Resultate sind folgende:

1,1284360	—	—	—	1,1283508
1,1283934	—	—	—	1,1283721
1,1283827	—	—	—	1,1283774
1,1283801	—	—	—	1,1283787
1,1283794	—	—	—	1,1283791
1,1283792	—	—	—	1,1283792

Folglich ist 1,1283792 sehr nahe der Halbmesser eines Kreises, welcher so groß ist, als ein Quadrat, dessen Seite = 2. Es ist leicht, hieraus das Verhältniß des Umfanges zum Durchmesser zu finden: denn, wie oben bewiesen, ist der Inhalt des Kreises gleich dem Inhalte des Quadrats seines Halbmessers, multiplicirt mit der Zahl π. Dividirt man also die Fläche 4 durch das Quadrat von 1,1283792, so erhält

man π. Man findet, wenn man die Rechnung ausführt, $\pi = 3{,}1415926$ rc., wie oben durch ein anderes Verfahren.*)

§. 54.

Berechnung einer krummlinig begrenzten Fläche.

Erklärung. Zieht man durch einen Punkt einer beliebigen Linie (Curve) zwei Parallellinien zu zwei gegebenen Linien, so heißen diese Linien vom Punkte der Curve bis an die gegebenen Geraden die Koordinaten des Punktes, die eine heißt Abscisse, die andere Ordinate, die beiden gegebenen Geraden heißen die Axen, ihr Durchschnitt heißt der Anfangspunkt der Messung; gewöhnlich wählt man die Axen senkrecht. Das Gesetz, wodurch die eine dieser Linien aus der andern in Verbindung mit den Bestimmungs-Größen der Curve berechnet werden kann, heißt die Gleichung der Curve. So z. B. ist für den Kreis, wenn man den Durchmesser als Axe annimmt, der Perpendikel von einem Punkte der Peripherie auf den Durchmesser die mittlere Proportionale zwischen den beiden Stücken desselben; und daraus läßt sich, wenn der Durchmesser als Bestimmungs-Grösse des Kreises gegeben ist, für jedes beliebige Stück desselben (Abscisse), der Perpendickel (Ordinate) berechnen, daher ist obiges Gesetz die Gleichung des Kreises. Die Herstellung der Gleichungen der Curven und Flächen und umgekehrt, so wie die Lösung der sich darauf beziehenden Aufgaben aus derselben ist der Gegenstand der analytischen Geometrie. Hier soll nur folgende Aufgabe Platz finden.

Fünfzehnter Satz. Aufgabe.

Den Inhalt einer von zwei Ordinaten, der Abscissenaxe und einer beliebigen Curve begrenzten ebenen Fläche annähernd zu finden.

Auflösung. Man theile in Fig. 186 die Axe AB in eine beliebige aber gerade Anzahl gleicher Theile z. B. in 6,

*) Diese Methode ist wörtlich aus Lengendre.

und bezeichne einen solchen Theil durch a, ferner errichte man in allen Theilungspunkten die Ordinaten, und bezeichne sie durch $y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7$, und mache $AC = CD = \frac{2}{3}a$, ziehe CF und DG senkrecht auf AB, und alsdann JF, FG und GH, und nun nehme man an, daß a so klein sey, daß der Unterschied zwischen Bg. JF und JF, Bg. FG und FG ausser Acht bleibt, wodurch der Theil AEHI der Fläche in drei Trapeze zertheilt wird; daher ist

$$AEHI = \frac{2}{3}a\left(\frac{AI+CF}{2}\right) + \frac{2}{2}a\left(\frac{CF+DG}{2}\right) + \frac{2}{3}a\left(\frac{DG+EH}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{3}a\,(AI + 2CF + 2DG + EH)$$

$$= \frac{1}{3}a\,(AI + 2\,(CF + DG) + EH)$$

$$= \frac{1}{5}a\,(y_1 + 4\,y_2 + y_3).$$

Ebenso ist der Theil zwischen den drei Ordinaten y_3, y_4, y_5 gleich

$$\frac{1}{3}a\,(y_3 + 4\,y_4 + y_5).$$

Dasselbe gilt vom nächsten Theile, nämlich gleich

$$\frac{1}{3}a\,(y_5 + 4\,y_6 + y_7).$$

Addirt man diese Theile, so ist

$F = \frac{1}{3}a\,(y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 4y_4 + 2y_5 + 4y_6 + y_7)$; d. h. **Jede Fläche, begrenzt von zwei Ordinaten, der Abscissenaxe und einer beliebigen Curve, ist gleich einer Summe, in welcher von der ersten und letzten Ordinate jede einmal, jede gerade viermal, und jede ungerade zweimal steht, multiplizirt mit dem dritten Theile des Abstandes zweier Ordinaten.**

Dadurch kann die Formel auf beliebig viele Ordinaten ausgedehnt werden.

§. 55.

Von der Fläche der Ellipse und der Parabel.

Erklärung. Um ein Paar Beispiele über den Inhalt von Flächen, die von Curven begrenzt sind, deren Gesetz bekannt ist, zu geben, betrachten wir:

1) eine krumme Linie, für welche die Summe der Entfernungen von zwei Punkten aus, beständig gleich bleibt — Ellipse. Fig. 147a.;

2) eine krumme Linie, für welche jeder einzelne Punkt von einem Punkte und einer Geraden gleich weit entfernt ist — Parabel. Fig. 147b.

Aus dem Begriffe der Ellipse sieht man, daß sie dadurch construirt werden kann, daß man einen Faden an zwei Punkten befestigt, ihn mit einer Spitze anspannt, und diese so bewegt, daß der Faden beständig gespannt bleibt. Die beiden Punkte heißen die Brennpunkte, der Durchmesser der Curve durch diese beiden Punkte heißt die große Axe, halbirt man die große Axe senkrecht, so heißt der erhaltene Durchmesser die kleine Axe, zwei Linien von einem Punkte der Peripherie nach den beiden Brennpunkten heißen die Radienvektoren. Aus der Entstehung der Curve sieht man, daß die Summe zweier Radienvektoren gleich der großen Axe ist, und daß ein Radiusvektor eines Endpunktes der kleinen Axe gleich ist der halben großen Axe; ist daher die halbe große Axe A, die halbe kleine Axe B, so ist der Abstand eines Brennpunktes vom Mittelpunkte $\sqrt{A^2 - B^2}$ und heißt die Excentrizität.

Um für einen Punkt der großen Axe, dessen Abstand vom Mittelpunkte bekannt ist, das Perpendikel bis an die Peripherie zu finden, seyen die Axen A und B, die Radienvektorn s_1 und s_2, der Abstand des Punktes auf der großen Axe A vom Mittelpunkte sey x, das entsprechende Perpendikel sey y, so ist:

$$s_1 = \sqrt{y^2 + (\sqrt{A^2 - B^2} - x)^2},\ s_2 = \sqrt{y^2 + (\sqrt{A^2 - B^2} + x)^2}, \text{ u.}$$

$$\sqrt{y^2 + (\sqrt{A^2 - B^2} - x)^2} + \sqrt{y^2 + (\sqrt{A^2 - B^2} + x)^2} = 2A, \text{ od.}$$

$$\sqrt{y^2 + (\sqrt{A^2 - B^2} - x)^2} = 2A - \sqrt{y^2 + (\sqrt{A^2 - B^2} + x)^2}, \text{ und}$$

daraus $\frac{y^2}{B^2} + \frac{x^2}{A^2} = 1$ (Gleichung der Ellipse).

Beschreibt man über die große Axe als Durchmesser einen Halbkreis, und berechnet für den Abstand x sowohl die Ordinate der Ellipse als die des Kreises, so ist

$$DC = \frac{B}{A}\sqrt{A^2 - x^2} \text{ und } EC = \sqrt{A^2 - x^2}, \text{ daher}$$

DC : EC = B : A, d. h. je zwei entsprechende Ordinaten der Ellipse und des Kreises verhalten sich zu einander, wie die Axen der Ellipse.

Betrachtet man nun den Kreis sowohl, als die Ellipse als eine Summe von Linien, deren Anzahl die große Axe angibt, so gilt obiges Verhältniß auch für die beiden Flächen, und es ist:

$$E : K = B : A \text{ oder}$$
$$E : A^2\pi = B : A, \text{ daher}$$
$$E = AB\pi.$$

Für die Parabel heißt der feste Punkt, auf den die Entfernungen der Peripherie-Punkte bezogen sind, ebenfalls Brennpunkt. Fällt man von diesem Punkte auf die gegebene Gerade ein Perpendikel, so heißt dieses die Axe der Parabel, und das Stück der Axe, das zwischen dem Brennpunkte und der Geraden liegt, wird von der Curve halbirt, welcher Punkt der Scheitel der Parabel genannt wird.

Um nun für einen Punkt auf der Axe, dessen Abstand vom Scheitel gegeben ist, die Ordinate der Curve zu finden, sey $AB = BC = p$, $BF = x$, $DF = y$, so ist $CD = ED = p + x$, daher:

$$CD^2 = DF^2 + CF^2, \text{ oder}$$
$$(p + x)^2 = y^2 + (x - p)^2, \text{ und daraus}$$
$$y^2 = 4px \text{ (Gleichung der Parabel).}$$

Um die Fläche eines parabolischen Segmentes BPM zu finden, zieht man BN # PM und MN # BP, so ist das Segment BPM zwei Drittheil des Rechteckes BPMN. Denn betrachtet man den Ueberschuß BMN bestehend aus einer

Summe von Linien parallel zu MN, von MN bis Null, so daß PM die Anzahl dieser Linien bezeichnet, so sind diese Linien lauter Quadratzahlen, während das Rechteck aus eben so vielen Linien besteht, wovon jede gleich der letzten ist; daher ist:

$$\frac{U}{R} = \frac{0 + 1 + 4 + 9 + 16 \ldots\ldots + x}{x + x + x + x + x \ldots\ldots + x}$$; nun ist aber

$$\frac{0 + 1}{1 + 1} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6}$$

$$\frac{0 + 1 + 4}{4 + 4 + 4} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{12}$$

$$\frac{0 + 1 + 4 + 9}{9 + 9 + 9 + 9} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{18},$$

daher

$$\frac{0 + 1 + 4 + 9 + 16 \ldots\ldots + x}{x + x + x + x + x \ldots\ldots + x} = \tfrac{1}{3},$$ oder

$$\frac{U}{R} = \tfrac{1}{3},\ U = \tfrac{1}{3} R,$$ daher

$$S = \tfrac{2}{3} R$$

$$S = \tfrac{2}{3} xy.$$

Zweiter Theil.

Räumliche Geometrie.

Fünftes Buch.

Von der Verbindung der Ebenen und Linien im Raume.

§. 56.

Erklärung. Die Größen und ihre Verbindungen, wovon in den Sätzen des ersten Theiles die Rede war, lagen immer in einer einzigen Ebene, und es konnte daher durch Zeichnung ein getreues Bild davon gegeben werden, weil sie ebenfalls in einer Ebene dargestellt wird. Dieses Merkmal fällt im zweiten Theile weg, daher auch die Möglichkeit eines getreuen Bildes auf einer Ebene; wir bilden gleichsam nur den Schatten nach, den die gegebene Verbindung von Größen auf einer Ebene bildet. Gegenstand des zweiten Theils und dessen Eintheilung.

Den Gegenstand des zweiten Theiles bilden Punkte, Linien, Ebenen, einige besondere krumme Flächen und Körper.

Die Lehre von der Lage der Punkte, Linien und Ebenen fassen wir im fünften und sechsten Buche zusammen; die Lehre von den Körpern und ihren Oberflächen bildet das siebente und achte Buch. Diese beiden Bücher zusammen enthalten das, was man Stereometrie nennt.

Eine Verbindung von Punkten, Linien und Ebenen kann man immer in mehreren Ebenen liegend denken, wodurch die einzelnen Forderungen eines Satzes auf die Resultate des ersten Theiles zurückgeführt werden.

Wir wissen bereits von einer Ebene, daß ihre Lage durch drei Punkte bestimmt ist, woraus hervorgeht, daß dieselbe auch bestimmt ist:

1) durch einen Punkt und eine gerade Linie;
2) durch zwei sich schneidende gerade Linien;
3) durch zwei Parallellinien;
4) durch einen Kreisbogen.

Ferner wissen wir, daß sich zwei Ebenen in einer geraden Linie durchschneiden; und eine Gerade und eine Ebene nur einen Punkt gemein haben können.

Mit diesen Vorkenntnissen gehen wir nun zur Untersuchung selbst über.

§. 57.

Erster Satz. Lehrsatz.

Vom Perpendikel auf eine Ebene, und den damit verbundenen schrägen Linien.

Wenn eine gerade Linie mit zweien in einer Ebene liegenden Geraden rechte Winkel bildet, so bildet sie mit einer dritten beliebigen Geraden, die in derselben Ebene liegt, ebenfalls einen rechten Winkel.

Fig. 187. Dat. $\angle ABC = \angle ABD = R$;
Thes. $\angle ABF = R$.

Bew. Verlängert man AB unter die Ebene bis E, so daß BE = AB wird, zieht AC und EC, so ist

$$\triangle ABC \cong \triangle EBC, \text{ und } AC = EC.$$

Zieht man AD und ED, so ist

$$\triangle ABD \cong \triangle EBD, \text{ und } AD = ED.$$

Zieht man die Gerade CFD, so ist

$\triangle ADC \cong \triangle EDC$ und $\angle ADC = \angle EDC$, $\angle ACD = \angle ECD$.

Zieht man endlich AF und EF, so ist

$\triangle ADF \cong \triangle EDF$, und $AF = EF$,

daher auch $\triangle ABF \cong \triangle EBF$ und $\angle ABF = \angle EBF$

und $\angle ABF = R$.

Erklärung. Man sieht daher ein, daß eine Gerade auf einer Ebene so stehen kann, daß sie mit allen in der Ebene durch ihren Fußpunkt gehenden Geraden rechte Winkel macht, und wir nennen in Zukunft eine solche Gerade ein Perpendikel auf die Ebene. Obiger Satz kann daher auch so ausgedrückt werden.

Wenn eine Gerade auf zwei Linien einer Ebene senkrecht steht, so steht sie auf der Ebene selbst senkrecht.

Anmerkung. Um das Senkrechtstehen einer Linie und einer Ebene auf einander anzuzeigen, gebrauchen wir öfters das Zeichen $\perp$, und bezeichnen eine Ebene durch zwei Eckbuchstaben.

I. Zusatz. Von einem Punkte auf eine Ebene gibt es nur ein Perpendikel.

Bew. Denkt man sich vom nämlichen Punkte aus noch eine beliebige zweite Gerade auf die Ebene gezogen, und die beiden Fußpunkte verbunden, so entsteht ein rechtwinkliges Dreieck, welches nur einen rechten Winkel enthalten kann, daher ist die zweite Gerade kein Perpendikel.

Anmerkung. Eine solche Gerade nennt man eine schräge Linie. Der Fußpunkt des Perpendikels von einem Punkte auf eine Ebene heißt die Projektion dieses Punktes auf die Ebene, das Perpendikel selbst heißt die prejicirende Linie.

II. Zusatz. Das Perpendikel ist die kürzeste Linie von einem Punkte auf eine Ebene.

III. Zusatz. Durch einen Punkt der Ebene gibt es ebenfalls nur ein Perpendikel auf diese.

Fig. 188. Dat. $AB \perp MN$;
Thes. AB das einzige Perpendikel durch B auf MN.

Bew. Zieht man durch B eine beliebige Gerade BC, und denkt sich durch ABC eine Ebene gelegt und erweitert, so schneidet sie MN in BD, und die Winkel ABC, CBD und ABD liegen in einer Ebene, daher ist

$\angle$ CBD < R, (als Theil von R) d. h.

BC ist kein Perpendikel auf MN.

Da dieses aber von jeder andern Geraden durch B gilt, so ist AB durch B das einzige Perpendikel auf MN.

IV. Zusatz. Jeder Punkt einer auf einer Linie senkrecht stehenden Ebene ist von zwei Punkten der Linie, die selbst gleich weit von der Ebene abstehen, gleich weit entfernt; und jeder Punkt neben der Ebene ist von denselben Punkten ungleich weit entfernt.

Fig. 189.

Dat. {BC = BA, AB ⊥ MN;

Thes. {AD = CD, AE > CE.

Bew. Es ist △ ABD ≌ △ CBD und AD = CD. Ferner ist, wenn man CF zieht

CE < EF + FC,
CE < EF + AF,
CE < AE.

Zweiter Satz. Lehrsatz.

Zwei schräge Linien von einem und demselben Punkte aus auf eine Ebene, deren Fußpunkte gleich weit vom Fußpunkte des Perpendikels abstehen, sind gleich lang.

Fig. 190.

Dat. {$\angle$ ABC = $\angle$ ABD = R, BC = BD;

Thes. AC = AD.

Bew. Es ist in

$$\triangle ABC \text{ und } ABD$$
$$AB = AB$$
$$BC = BD$$
$$\angle ABC = \angle ABD$$
$$\overline{\triangle ABC \cong \triangle ABD \text{ und }}$$
$$AC = AD.$$

Zusatz. Von zwei schrägen Linien ist diejenige die größere, deren Fußpunkt weiter vom Fußpunkte des Perpendikels entfernt ist.

Fig. 191. Dat. $\begin{cases} \angle ABC = \angle ABD = R, \\ BC > BD; \end{cases}$

Thes. $AC > AD.$

Bew. Macht man $BE = BD$, und zieht AE, so ist

$$AE = AD,$$
$$AE < AC \text{ (I. Buch)}.$$
$$\overline{AD < AC.}$$

Dritter Satz. Lehrsatz

Wenn zwei schräge Linien gleich lang sind, so sind ihre Fußpunkte gleich weit vom Fußpunkte des Perpendikels entfernt.

Fig. 192. Dat. $\begin{cases} \angle ABC = \angle ABD = R, \\ AC = AD; \end{cases}$

Thes. $BC = BD.$

Bew. Es ist in

$$\triangle ABC \text{ u. } \triangle ABD$$
$$AB = AB$$
$$AC = AD$$
$$\angle ABC = \angle ABD$$
$$\overline{\triangle ABC \cong \triangle ABD, \text{ und }}$$
$$BC = BD.$$

I. Zusatz. Von zwei schrägen Linien ist die größere weiter vom Fußpunkte des Perpendikels entfernt.

II. Zusatz. Die Endpunkte von mehrern gleich langen schrägen Linien liegen auf der Peripherie eines Kreises, dessen Mittelpunkt der Fußpunkt des Perpendikels ist.

III. Zusatz. Jeder Punkt neben dieser Senkrechten hat nur je zwei gleiche Entfernungen von den Punkten der Peripherie des obigen Kreises.

Bew. Denn zieht man in Fig. 193. vom Punkte C ebenfalls ein Perpendikel auf MN, so erhält CD die Entfernung DE; beschreibt man nun mit DE einen Kreis, so schneidet dieser den ersten außer in D auch noch in F, und es ist CD = CF; jede andere schräge Linie faßt innerhalb oder außerhalb der Peripherie nur E, ist daher kürzer oder länger als CD oder CF.

IV. Zusatz. Steht eine Gerade im Mittelpunkte eines Kreises so, daß außer dem Fußpunkte noch ein anderer Punkt derselben von drei Punkten der Peripherie gleich weit entfernt ist, so ist die Linie senkrecht auf der Ebene des Kreises.

V. Zusatz. Geht eine Gerade durch zwei Punkte, von deren jeder von den drei nämlichen Punkten einer Ebene gleich weit entfernt ist, so steht die Gerade auf der Ebene senkrecht.

Fig. 194. Dat. $\begin{cases} AC = AD = AE, \\ BC = BD = BE; \end{cases}$

Thes. $AB \perp MN$.

Bew. Es ist

$\triangle ABC \cong \triangle ABD \cong \triangle ABE$, daher

$\angle CAB = \angle DAB = \angle EAB$.

Zieht man nun FC, FD und FE, so ist

$\triangle ACF \cong \triangle ADF \cong \triangle AEF$, und

$FC = FD = FE$, d. h.

F ist der Mittelpunkt des Kreises durch CDE.

Da nun AF im Mittelpunkte des Kreises steht, und der Punkt A von drei Punkten der Peripherie gleich weit entfernt ist, so steht AB auf der Ebene selbst senkrecht, oder

$$AB \perp MN.$$

Vierter Satz. Lehrsatz.

Zieht man vom Fußpunkte eines Perpendikels auf einer Ebene eine Senkrechte auf eine beliebige Linie in dieser Ebene, so steht jede Verbindungslinie des Endpunktes dieser Senkrechten mit einem Punkte des Perpendikels senkrecht auf der Linie in der Ebene.

Fig. 195. Dat. $\begin{cases} BC \perp MN, \\ \angle CAD = R; \end{cases}$

Thes. $\angle BAD = R.$

Bew. Macht man AD = AE, und zieht CD und CE, so ist

$$CD = CE.$$

Zieht man nun BD und BE, so ist auch

$$BD = BE,$$

daraus folgt $\triangle BAD \cong \triangle BAE$, und

$$\angle BAD = \angle BAE = R.$$

I. Zusatz. Zieht man von einem Punkte aus zwei Perpendikel, den einen auf eine Ebene, den andern auf eine Linie in dieser Ebene, so steht die Verbindungslinie der beiden Fußpunkte diese Perpendikel ebenfalls senkrecht auf der Linie.

II. Zusatz. Errichtet man durch einen Punkt einer Geraden zwei Perpendikel auf diese, und fällt von einem Punkte des einen Perpendikels eine Senkrechte auf das andere, so steht diese auch senkrecht auf der Ebene dieses Perpendikels und der gegebenen Geraden.

Fig. 195. Dat. $\begin{cases} \angle BAD = \angle BAE = R, \\ \angle CAD = \angle CAE = R; \\ BCA = R; \end{cases}$

Thes. $BC \perp MN.$

Bew. Zieht man BD und BE, CD und CE, so ist:

$$BA^2 = BC^2 + CA^2$$
$$BE^2 - EA^2 = BC^2 + CE^2 - EA^2$$
$$BE^2 = BC^2 + CE^2, \text{ d. h.}$$
$$\angle BCE = R.$$

Oder:

$$BA^2 = BC^2 + CA^2$$
$$BD^2 - DA^2 = BC^2 + CD^2 - DA^2$$
$$BD^2 = BC^2 + CD^2, \text{ d. h.}$$
$$\angle BCD = R.$$

Da nun BC mit zwei Linien in MN rechte Winkel macht, so ist

$$BC \perp MN.$$

§. 58.

Fünfter Satz. Lehrsatz.

Von den Parallellinien im Raume.

Wenn von zwei Parallellinien eine auf einer Ebene senkrecht steht, so steht auch die andere darauf senkrecht.

Fig. 196. Dat. $\begin{cases} AB \# CD, \\ AB \perp MN; \end{cases}$

Thes. $CD \perp MN.$

Bew. Zieht man BD, so ist

$$\angle CDB = R.$$

Zieht man ferner in MN auf BD die Senkrechte DE, und zieht AD, so steht ED senkrecht auf der Ebene durch B,

D und A, und da auch DC in dieser Ebene liegt, so steht ED auf DC senkrecht, daher

$$\angle CDE = R.$$

Da nun CD mit zwei Linien in MN rechte Winkel macht, so steht CD senkrecht auf MN, d. h.

$$CD \perp MN.$$

I. Zusatz. Wenn zwei Linien auf einer Ebene senkrecht stehen, so sind sie parallel.

Fig. 197. Dat. $\begin{cases} AB \perp MN, \\ CD \perp MN; \end{cases}$

Thes. $AB \# CD.$

Bew. Wäre CD nicht parallel AB, so wäre durch D eine andere Linie, z. B. DE parallel AB, alsdann wäre aber auch

$DE \perp MN$, es ist aber

$DC \perp MN$, daher gäbe es durch D zwei Perpendikel auf MN, was gegen einen frühern Satz, daher unmöglich ist, also ist auch unmöglich

$$DE \# AB.$$

Da aber dieses von jeder andern Geraden durch D außer DC gilt, so ist

$$DC \# AB.$$

II. Zusatz. Wenn zwei Gerade einer dritten parallel sind, so sind sie auch unter sich parallel.

Fig. 198. Dat. $\begin{cases} AB \# EF, \\ CD \# EF; \end{cases}$

Thes. $AB \# CD.$

Bew. Denkt man durch F eine Ebene senkrecht auf FE gelegt, so trifft sie CD vielleicht in D, und AB in B, und es ist

$CD \perp ADF$

und $AB \perp ADF$

$$AB \# CD.$$

Sechster Satz. Lehrsatz.

Wenn die Schenkel zweier Winkel parallel sind, so sind die Winkel einander gleich.

Fig. 199. Dat. $\begin{cases} AB \# ED, \\ BC \# EF; \end{cases}$

Thes. $\angle ABC = \angle DEF.$

Bew. Macht man AB = ED und BC = EF, und zieht BE, AD und CF, so ist

ABED ein Parallelogramm, daher BE = u. # AD,
ferner ist CBEF ein Parallelogramm, daher BE = u. # CF

AD = u. # CF.

Zieht man nun AC und FD, so ist auch ACFD ein Parallelogramm; daher

AC = DF, ferner ist
AB = DE
BC = EF

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$, und
$\angle ABC = \angle DEF.$

§. 59.

Von der Neigung einer schrägen Geraden und einer Ebene.

Erklärung. Fällt man von einem Punkte einer gegen eine Ebene schräg liegenden Geraden ein Perpendikel auf die Ebene, und verbindet den Fußpunkt desselben mit dem Fußpunkte der Geraden, so heißt diese gerade Verbindungslinie die Projektion der Geraden auf dieser Ebene.

Siebenter Satz. Lehrsatz.

Der Winkel einer Linie mit ihrer Projektion auf einer Ebene ist kleiner als die Winkel, die

sie mit irgend einer andern Geraden in derselben Ebene bildet.

Fig. 200. Dat. $AC \perp MN$;
Thes. $\angle ABC < \angle ABD$.

Bew. Macht man $BD = BC$, und zieht man AD, so ist

in $\triangle ABC$ u. $\triangle ABD$

$$AB = AB$$
$$BC = BD$$
$$AC < AD$$

daher $\angle ABC < \angle ABD$.

Anmerkung. Der Winkel, den eine Linie mit ihrer Projektion auf einer Ebene bildet, heißt vermöge obiger Eigenschaft der Neigungs-Winkel der Geraden gegen die Ebene.

§. 60.

Achter Satz. Lehrsatz.

Wenn eine Gerade mit einer andern in einer Ebene liegenden Geraden parallel ist, so ist sie mit der Ebene selbst parallel. Vom Parallelismus einer Geraden und einer Ebene.

Fig. 201. Dat. $AB \# CD$;
Thes. $AB \# MN$.

Bew. Wäre AB nicht parallel MN, d. h. würde AB die Ebene MN schneiden, so würde auch, da man durch AB und CD eine Ebene denken kann, und daher der genannte Durchschnitt beiden Ebenen angehören würde, AB die Gerade CD schneiden, was gegen die Daten, daher unmöglich ist, also ist auch unmöglich, daß AB die Ebene MN schneidet, d. h.

$$AB \# MN.$$

§. 61.

Neunter Satz. Lehrsatz.

Von der Neigung zweier Ebenen.

Wenn sich eine Ebene um eine in ihr liegende Gerade dreht, so beschreiben sämmtliche Punkte Kreisbögen, deren Ebenen senkrecht auf der Geraden stehen, deren Mittelpunkte auf der Geraden selbst liegen, und deren Centriwinkel sämmtlich einander gleich sind.

Bew. Fällt man in Fig. 202. AB senkrecht von A auf DE, und errichtet BC unter einem beliebigen Winkel zu BA senkrecht auf DE, so ist die Ebene ABC senkrecht auf DE. Dreht man nun MN um DE, und betrachtet den Weg des Punktes A, so bewegt sich dieser in einem Kreisbogen, dessen Ebene ABC, und dessen Mittelpunkt B ist. Denn wäre ABC nicht die Ebene dieses Bogens, so wäre, wenn man BD = BE macht, und AD und AE zieht,

AD > od. < AE (I. Lehrs. IV. Zusatz)

was gegen das Wesen dieser Bewegung, wornach A während der Bewegung von allen Punkten von DE dieselbe Entfernung behält, daher unmöglich ist, also ist auch unmöglich, daß ABC nicht die Ebene des Weges von A ist, d. h. die Ebene des Bogens von A steht senkrecht auf DE.

Da ferner B ein Punkt der Ebene des von A beschriebenen Bogens ist, und von allen Punkten dieses Bogens gleich weit entfernt bleibt, so ist B der Mittelpunkt dieses Bogens.

Betrachtet man endlich den Weg eines zweiten Punktes, nämlich F, so ist dessen Ebene FGH ebenfalls senkrecht auf DE, und G der Mittelpunkt des Bogens, ferner ist aber auch

FG ‡ AB ($\angle$ FGD = $\angle$ ABD = R)
HG ‡ CB ($\angle$ HGD = $\angle$ CBD = R)

$\angle$ HGF = $\angle$ CBA, d. h. die Centriwinkel der von verschiedenen Punkten der Ebene beschriebenen Bögen sind einander gleich.

Erklärung. Vermöge der so eben entwickelten Merkmale heißt der Winkel ABC der Neigungswinkel der beiden Ebenen MN und DEC. Die Ebene ABC heißt die Ebene des Neigungswinkels, d. h. jede Ebene, die auf der Durchschnittslinie zweier sich schneidenden Ebenen senkrecht steht, heißt Ebene des Neigungswinkels.

Die Schenkel des Neigungswinkels stehen senkrecht auf der Durchschnittslinie.

Ist der Neigungswinkel zweier Ebenen ein rechter, so sagt man, die Ebenen stehen senkrecht auf einander.

Zehnter Satz. Lehrsatz.

Fällt man von einem Punkte einer Ebene ein Perpendikel auf die Durchschnittslinie dieser Ebene mit einer zweiten Ebene, worauf die erste senkrecht steht, so steht dieses auch senkrecht auf der zweiten Ebene selbst.

Fig. 203. Dat. { PQ $\perp$ MN, $\angle$ ABQ = R;
Thes. AB $\perp$ MN.

Bew. Es ist AB der eine Schenkel des Neigungswinkels von PQ zu MN. Zieht man nun BC in MN senkrecht auf BQ, so ist BC der zweite Schenkel dieses Neigungswinkels, daher nach den Daten.

$\angle$ ABC = R, ferner ist
$\angle$ ABQ = R, daher ist

AB $\perp$ MN.

I. Zusatz. Errichtet man in einem Punkte der Durchschnittslinie zweier auf einander senkrecht stehenden Ebenen ein Perpendikel auf die eine Ebene, so liegt dieses ganz in der andern Ebene.

Bew. Denn errichtet man in B ein Perpendikel auf MN, so fällt dieses mit BA zusammen, weil es durch B auf MN nur ein Perpendikel gibt, d. h. das verlangte Perpendikel liegt in PQ. Fig. 203.

II. Zusatz. Fällt man von einem Punkte einer Ebene, die auf einer andern senkrecht steht, ein Perpendikel auf diese, so liegt dieses in der erstern Ebene.

III. Zusatz. Stehen zwei Ebenen auf einer dritten senkrecht, so steht die Durchschnittslinie (Communsektion) der beiden erstern ebenfalls senkrecht auf der dritten Ebene.

Bew. Denkt man sich von einem Punkte der Durchschnittslinie ein Perpendikel auf die dritte Ebene, so liegt dieses sowohl in der ersten als zweiten Ebene, und ist daher mit der Durchschnittslinie einerlei, d. h. die Durchschnittslinie steht auf der dritten Ebene senkrecht.

Eilfter Satz. Lehrsatz.

Legt man durch ein Perpendikel auf eine Ebene eine zweite Ebene, so steht diese auf der erstern senkrecht.

Fig. 203. Dat. { $AB \perp MN$, PQ enthält AB;
Thes. $PQ \perp MN$.

Bew. Es ist AB ein Schenkel des Neigungswinkels. Zieht man nun BC senkrecht auf BQ, so ist BC der zweite

Schenkel des Neigungswinkels, und da $\angle$ ABC = R, so ist

$$PQ \perp MN.$$

Zusatz. Jede von zwei sich schneidenden Ebenen steht auf der Ebene des Neigungswinkels senkrecht.

Zwölfter Satz. Lehrsatz.

Eine einzige gerade Linie kann niemals auf zwei sich schneidenden Ebenen zugleich senkrecht stehen.

Bew. Der Beweis dieses Satzes zerfällt in zwei, je nachdem die Linie die beiden Ebenen in einem gemeinschaftlichen Punkte, oder in zwei verschiedenen Punkten trifft.

I. Legt man in Fig. 204. durch AB eine Ebene, so schneidet sie MN in CBD und PQ in BE, und $\angle$ CBA, $\angle$ ABE und $\angle$ ABD liegen in einer Ebene, daher sieht man, daß $\angle$ ABE nur ein Theil von $\angle$ ABD ist; ist daher $\angle$ ABD = R, so ist $\angle$ ABE < R, d. h. steht AB senkrecht auf MN, so steht sie nicht senkrecht auf PQ.

II. Verbindet man in Fig. 205. A und B mit einem Punkte der Durchschnittslinie z. B., so ist ABC ein Dreieck; ist daher $\angle$ B = R, so ist $\angle$ A < R, d. h. steht AB senkrecht auf MN, so steht sie nicht senkrecht auf MP.

Zusatz. Steht eine Gerade in einem und demselben Punkte senkrecht auf drei Linien, so liegen diese in einer einzigen Ebene.

Bew. Denkt man sich durch die erste und zweite Gerade eine Ebene, so steht die Gerade darauf senkrecht; denkt man sich durch die zweite und dritte Gerade ebenfalls eine Ebene, so steht die Gerade auch auf dieser senkrecht; wären daher diese beiden Ebenen verschieden, so stünde eine einzige Gerade auf zwei sich schneidenden Ebenen senkrecht, was gegen den Lehrsatz, daher unmöglich ist, also ist auch unmöglich, durch

die drei gegebenen Geraden zwei verschiedene Ebenen zu denken, d. h. drei sich schneidende Gerade, worauf eine vierte senkrecht steht, liegen in einer Ebene.

§. 62.

Von den parallelen Ebenen.

Erklärung. Wenn sich zwei Ebenen, nach allen Seiten unendlich erweitert, nicht schneiden, so sind sie parallel.

Dreizehnter Satz. Lehrsatz.

Steht eine Gerade auf zwei Ebenen zugleich senkrecht, so sind diese parallel.

Fig. 206. Dat. $\begin{cases} AB \perp MN, \\ AB \perp PQ; \end{cases}$
Thes. $MN \# PQ.$

Bew. Würden die beiden Ebenen sich irgendwo schneiden, so könnte man einen ihrer Durchschnittspunkte mit A und B verbinden, da aber die eine dieser Verbindungslinien in MN, die andere in PQ seyn würde, so würde nach den Daten AB auf beiden senkrecht stehen, d. h. es würde ein Dreieck mit zwei rechten Winkeln entstehen, was unmöglich ist, also ist auch unmöglich, daß sich MN und PQ schneiden, d. h.

$$MN \# PQ.$$

Vierzehnter Satz. Lehrsatz.

Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten durchschnitten werden, so sind die Durchschnittslinien parallel.

Fig. 207. Dat. $MN \# PQ;$
Thes. $AB \# CD.$

Bew. Erstens liegen die beiden Geraden AB und CD in einer Ebene, nämlich in RS; zweitens können sie sich nicht schneiden, denn ihr Durchschnitt würde auch ein Durchschnitt der beiden Ebenen seyn, was gegen die Daten wäre.

Da nun AB und CD in einer Ebene liegen und sich nicht schneiden, so ist

AB # CD.

I. Zusatz. Steht eine Gerade auf einer von zwei parallelen Ebenen senkrecht, so steht sie auch auf der andern senkrecht.

II. Zusatz. Parallele Linien zwischen parallelen Ebenen sind einander gleich.

III. Zusatz. Wenn zwei beliebige gerade Linien durch drei parallele Ebenen geschnitten werden, so sind die zwischen liegenden Stücke proportionirt.

Anmerkung. Im ersten Zusatze legt man durch die Senkrechte zwei Ebenen, wodurch mit Anwendung der Sätze von den Parallellinien das Verlangte gefunden wird. Die Wahrheit des zweiten Zusatzes folgt aus den Eigenschaften des Parallelogramms. Im dritten Zusatze verschiebt man eine Linie, bis ihr Anfangspunkt mit dem der erstern zusammenfällt.

Fünfzehnter Satz. Lehrsatz.

Wenn zwei Ebenen von einer dritten in parallelen Linien geschnitten werden, so liegen die beiden Neigungswinkel in einer einzigen Ebene.

Fig. 208. Dat. AB # CD;
Thes. Eine Ebene enthält beide Neigungswinkel.

Bew. Errichtet man durch E in RS die Senkrechte EF, und in MN die Senkrechte EG auf AB, so ist $\angle$ FEG der Neigungswinkel von RS zu MN.

Erweitert man nun die Ebene FEG, so schneidet sie CD

in H und zwar in der Verlängerung von FE, und PQ in HI, und es ist, da CD als Parallellinie zu AB senkrecht auf FEG steht, ∠ EHI der Neigungswinkel von RS zu PQ, und liegt mit FEG in einer Ebene.

I. Zusatz. Werden zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten, so ist:

1) jedes Paar entgegengesetzte Winkel gleich zwei Rechten;
2) jedes Paar Wechselwinkel gleich;
3) jedes Paar correspondirende Winkel gleich;
4) jedes Paar innere und äußere Wechselwinkel gleich zwei Rechten.

II. Zusatz. Sind zwei sich schneidende Ebenen zweien andern parallel, so sind ihre Neigungswinkel einander gleich.

Sechzehnter Satz. Lehrsatz.

Sind die Schenkel zweier Winkel parallel, so sind auch ihre Ebenen parallel.

Fig. 209. Dat. { AB # DE,
BC # EF;

Thes. ABC # DEF.

Bew. Denkt man BH senkrecht auf DEF gezogen, und zieht HG # DE, und HI # EF, so ist auch

HG # AB, daher ∠ ABH = R,
und HI # BC, daher ∠ CBH = R.

Da nun BH sowohl auf DEF als ABC senkrecht steht, so ist

ABC # DEF.

I. Zusatz. Wenn drei Parallellinien gleich lang sind, so sind auch die Ebenen ihrer Endpunkte parallel.

II. Zusatz. Wenn zwei Ebenen von einer dritten in parallelen Linien geschnitten werden, und es sind:

1) ein Paar entgegengesetzte Winkel gleich zwei Rechten; oder
2) ein Paar Wechselwinkel gleich; oder
3) ein Paar correspondirende Winkel gleich; oder
4) ein Paar innere und äußere Wechselwinkel gleich zwei Rechten,

so sind die Ebenen parallel.

Anmerkung. Eine Methode, die in diesem Buche vorgekommenen Größenverbindungen so zu zeichnen, daß man aus der Zeichnung die Lage, Größe und Form aller einzelnen Theile erkennt, enthält die descriptive Geometrie; anderseits aber bildet gerade dieses Buch die Grundlage einer wissenschaftlichen Behandlung jener Methode.

Sechstes Buch.

Vom körperlichen Dreiecke.

§. 63.

Vom körperlichen Dreiecke überhaupt, u. dem Supplementar-Dreiecke insbesondere.

Erklärung. Schneiden sich drei Ebenen in einem Punkte, so heißt die ganze Figur körperliches Dreieck. Der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt der drei Ebenen heißt überhaupt ein körperliches Eck, und zwar ein dreiseitiges, in Bezug auf das Dreieck aber heißt er die Spitze desselben; die drei geraden Durchschnitslinien der Ebenen heißen die Kanten, die Winkel dieser die Seiten des Dreieckes. Die Summe dieser Seiten heißt die Größe des Eckes; auch wenn das Eck mehrseitig ist, so heißt die Summe der Seiten oder Kantenwinkel die Größe des Eckes. Die Neigungswinkel der Ebenen gegen einander heißen die Winkel des Dreieckes.

Nimmt man im Innern eines körperlichen Dreieckes einen Punkt an, fällt drei Perpendikel auf die drei Seiten, und legt durch diese Ebenen, so entsteht ein neues körperliches Dreieck, welches Supplementar-Dreieck heißt; in Bezug darauf heißt alsdann das erste Dreieck primitives Dreieck.

Erster Satz. Lehrsatz.

Im körperlichen Dreiecke ist je eine Seite kleiner als die Summe der beiden andern.

Fig. 210. Dat. $\left\{ \begin{array}{l} BAC > BAD, \\ \quad\;\; > CAD; \end{array} \right.$

Thes. $BAC < BAD + CAD.$

Bew. Zieht man in BAC die Gerade AE so, daß $\angle BAE = \angle BAD$ wird, zieht ferner die Gerade BEC, macht $AD = AE$, und zieht BD und CD, so ist

$$\triangle BAE \cong \triangle BAE, \text{ und}$$

$$BE = BD;$$

ferner ist $BC < BD + DC$, oder

$$BE + EC < BD + DC, \text{ oder}$$

$$EC < DC; \text{ daher ist}$$

in $\triangle EAC$ u. $\triangle DAC$

$$CA = AC$$

$$AE = AD$$

$$EC < DC$$

$$\angle EAC < DAC.$$

Da nun $\angle BAE = \angle BAD$, und

$\angle EAC < DAC$, so ist

$$BAC < DAC + BAD.$$

Da nun BAC als die größte Seite kleiner ist als die beiden andern, so gilt dieses um so mehr von den andern Seiten.

Zweiter Satz. Lehrsatz.

Jedes körperliche Eck ist kleiner als vier Rechte.

Fig. 211. Thes. $A < 4R.$

Bew. Denkt man sich eine Ebene, die sämmtliche Kanten schneidet, wie BCDE, so entstehen ein Vieleck, und an allen Ecken desselben körperliche Dreiecke. Setzt man nun

$$\angle EBC + \angle BCD + \angle CDE \ldots\ldots = P,$$
$$\angle ABE + \angle ABC + \angle ACB + \angle ACD \ldots = S,$$
$$\text{u. } \angle BAC + \angle CAD + \angle DAE \ldots\ldots = A,$$

so ist, wenn die Anzahl der Seiten durch n ausgedrückt ist:

$$S > P \text{ (obiger Satz)},$$
$$P = n \,.\, 2R - 4R,$$
$$S > n \,.\, 2R - 4R;$$
$$\text{nun ist } A + S = n \,.\, 2R$$

$$A < 4R.$$

Dritter Satz. Lehrsatz.

Die Kanten des primitiven Dreieckes stehen auf den Seiten des Supplementar-Dreieckes senkrecht.

Fig. 212.

Dat. $\begin{cases} EF \perp BAD, \\ EH \perp CAD, \\ EG \perp BAC; \end{cases}$

Thes. $\begin{cases} AD \perp FEHI, \\ AB \perp GEFK, \\ AC \perp GEHL. \end{cases}$

Bew. Da z. B. FEHI sowohl auf BAD als CAD senkrecht steht, und umgekeht, so steht auch AD senkrecht auf FEHI.

Dasselbe gilt von den übrigen Kanten; daher kann man obigen Satz auch so ausdrücken:

Man darf die Begriffe vom primitiven und supplementaren Dreiecke vertauschen.

I. Zusatz. Je eine Seite des Supplementar-Dreieckes,

und der entsprechende Winkel des primitiven Dreieckes sind zusammen gleich zwei Rechten.

II. Zusatz. Je ein Winkel des Supplementar-Dreieckes, und die entsprechende Seite des primitiven Dreieckes sind zusammen gleich zwei Rechten.

Vierter Satz. Lehrsatz.

Wenn in einem körperlichen Dreiecke zwei Seiten einander gleich sind, so sind auch die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel einander gleich.

Fig. 213. Dat. ABD = CAD;
Thes. $\angle$(AB) = $\angle$ (AC).

Bew. Legt man durch D Ebenen senkrecht auf AB und AC, so schneiden sich diese in DE senkrecht auf ABC, und es entstehen die Neigungswinkel an den Kanten AB u. AC. Nun ist

$\triangle$ ABD $\cong$ $\triangle$ ACD, DB = DC;
$\triangle$ BDE $\cong$ $\triangle$ CDE, $\angle$ DBE = $\angle$ DCE, oder
$\angle$ (AB) = $\angle$ (AC).

I. Zusatz. Sind in einem körperlichen Dreiecke zwei Winkel einander gleich, so sind es auch die diesen Winkeln gegenüberstehenden Seiten.

Bew. Aus der Gleichheit der zwei Winkel des primitiven Dreieckes folgt die Gleichheit der zwei entsprechenden Seiten des Supplementar-Dreieckes, woraus nach obigem Satze die Gleichheit der beiden diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel folgt, und daraus folgt endlich die Gleichheit der zwei entsprechenden Seiten des primitiven Dreieckes.

Bezeichnet man die beiden Winkel durch A und B, die gegenüberliegenden Seiten durch a und b, die entsprechenden

Größen des Supplementar-Dreieckes aber durch dieselben Buchstaben, nur margirt, also die Seiten durch a′ und b′, die Winkel durch A′ und B′, so ist

$$A + a' = 2R$$
$$B + b' = 2R$$

$$A + a' = B + b' \text{ oder}$$
$$a' = b' \text{ und daraus folgt } A' = B'.$$

Ebenso ist

$$A' + a = 2R$$
$$B' + b = 2R$$

$$A' + a = B' + b, \text{ oder}$$
$$a = b.$$

II. Zusatz. Sind in einem körperlichen Dreiecke alle Seiten einander gleich, so sind es auch die Winkel.

III. Zusatz. Sind in einem körperlichen Dreiecke alle Winkel einander gleich, so sind es auch die Seiten.

Fünfter Satz. Lehrsatz.

In jedem körperlichen Dreiecke liegt dem größern Winkel auch die größere Seite gegenüber.

Fig. 214. Dat. $\angle(AC) > \angle(AB)$;
Thes. $BAD > CAD$.

Bew. Zertheilt man durch CAE den Winkel an AC in zwei Theile, so daß der an BAC anliegende Theil gleich ist dem Winkel an AB, so ist auch $BAE = CAE$.

Nun ist $CAD < DAE + CAE$, oder
$CAD < DAC + BAE$, oder
$CAD < BAD$.

Zusatz. In jedem körperlichen Dreiecke steht der größern Seite auch der größere Winkel gegenüber.

§. 64.

Sechster Satz. Lehrsatz.

Wenn in zwei körperlichen Dreiecken alle Seiten einzeln einander gleich sind, so sind die gleichen Seiten gegenüberliegenden Winkel ebenfalls einander gleich. Zwei körperliche Dreiecke mit drei gleichen Größen.

Dat. $\begin{cases} BAD = bad, \\ BAC = bac, \\ CAD = cad; \end{cases}$

Fig. 215.

Thes. $\begin{cases} \angle(AB) = \angle(ab), \\ \angle(AC) = \angle(ac), \\ \angle(AD) = \angle(ad). \end{cases}$

Bew. Macht man AD = ad, legt durch D Ebenen senkrecht auf AB und AC, und ebenso durch d senkrecht auf ab und ac, so ist $\angle DBE = \angle(AB)$, $\angle DCE = (AC)$, daher DE senkrecht auf BAC; ganz dasselbe findet im zweiten Dreiecke statt.

Nun ist

$\triangle ABD \cong \triangle abd$, BD = bd und AB = ab,
$\triangle DAC \cong \triangle dac$, DC = dc und AC = ac,
BACE $\cong$ bace, BE = be und CE = ce,
$\triangle DBE \cong \triangle dbe$, und $\angle DBE = \angle dbe$,
$\triangle DCE \cong \triangle dce$, und $\angle DCE = \angle dce$.

Auf dieselbe Weise würde sich bei einer andern ähnlichen Construktion die Gleichheit der Neigungswinkel an den Kanten AD und ad ergeben.

I. Zusatz. Wenn in zwei körperlichen Dreiecken alle Winkel einzeln einander gleich sind, so sind auch die gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten einander gleich.

Bew. Aus der Gleichheit der Winkel folgt die Gleich-

heit der Seiten der Supplementar-Dreiecke, und daraus nach obigem Satz die Gleichheit ihrer Winkel, woraus die Gleichheit der Seiten in den primitiven Dreiecken folgt.

Die wirkliche Entwicklung des Satzes ist folgende:

Es bezeichnen A, B, C, und D, E, F, die Winkel der primitiven Dreiecke, und es sey

$$A = D,$$
$$B = E,$$
$$C = F;$$

bezeichnet man ferner die gegenüberstehenden Seiten mit denselben kleinen Buchstaben, und die entsprechenden Grössen der Supplementar-Dreiecke mit denselben Buchstaben margirt, so ist:

$$A + a' = 2\,R \qquad D + d' = 2\,R$$
$$B + b' = 2\,R \qquad E + e' = 2\,R$$
$$C + c' = 2\,R \qquad F + f' = 2\,R$$

$$A + a' = D + d', \quad B + b' = E + e', \quad C + c' = F + f'$$
$$a' = d' \qquad b' = e' \qquad c' = f'.$$

Daraus nun folgt nach obigem Satz:

$$A' = D', \qquad B' = E', \qquad C' = F'.$$

Nun ist:

$$A' + a = 2\,R \qquad D' + d = 2\,R$$
$$B' + b = 2\,R \qquad E' + e = 2\,R$$
$$C' + c = 2\,R \qquad F' + f = 2\,R$$

$$A' + a = D' + d, \quad B' + b = E' + e, \quad C' + c = F' + f,$$
$$a = d, \qquad b = e, \qquad c = f$$

Siebenter Satz. Lehrsatz.

Wenn in zwei körperlichen Dreiecken zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel einander gleich sind, so sind die übrigen Größen ebenfalls einander gleich.

$$\text{Dat.}\quad \begin{cases} BAC = bac, \\ BAD = bad, \\ \angle (AB) = \angle (ab); \end{cases}$$

Fig. 215.

$$\text{Thes.}\quad \begin{cases} CAD = cad, \\ \angle (AD = \angle (ad), \\ \angle (AC) = \angle (ac). \end{cases}$$

Bew. Macht man $AD = ad$, legt durch D Ebenen senkrecht auf AB und AC, und ebenso im zweiten Dreiecke, so stehen DE und de senkrecht auf BAC und bac, und es entstehen an AB und AC, so wie an ab und ac die Neigungswinkel. Nun ist:

$\triangle ABD \cong \triangle abd$, $BD = bd$ und $AB = ab$;
$\triangle DBE \cong \triangle dbe$, $DE = de$ und $BE = be$;
$EBAC \cong ebac$, $CE = ce$ und $AC = ac$;
$\triangle DEC \cong \triangle dec$, $DC = dc$ und $\angle DCE = \angle dce$;
$\triangle DAC \cong \triangle dac$, $\angle DAC = \angle dac$;

Die Gleichheit der Winkel an AD und ad folgt wie oben.

Zusatz. Sind in zwei körperlichen Dreiecken eine Seite und die beiden anliegenden Winkel einander gleich, so sind auch die übrigen gleichliegenden Grössen einander gleich.

Achter Satz. Lehrsatz.

Sind in zwei körperlichen Dreiecken zwei Seiten und ein paar gegenüberliegende Winkel einander gleich, so sind es auch die übrigen homologen Größen, wenn die Dreieckformen entsprechende sind, d. h. wenn die Summe der beiden andern gegenüberliegenden Winkel größer oder kleiner als zwei Rechte ist.

Dat.	BAD = bad, CAD = cad, $\angle(AB) + \angle(ab) >$ od. < 2 R. $\angle(AC) = \angle(ac)$;
Fig. 216. Thes.	BAC = bac, $\angle(AB) = \angle(ab)$, $\angle(AD) = \angle(ad)$.

Bew. Legt man durch D Ebenen senkrecht auf AB und AC, so schneiden sich diese in DE, welches senkrecht auf ABC steht, und es entstehen die Neigungswinkel an AB und AC. Macht man ferner ad = AD, und verfährt im zweiten Dreiecke ebenso, so ist:

$\triangle$ DAC $\cong$ $\triangle$ dac, DC = dc u. AC = ac;
$\triangle$ DCE $\cong$ $\triangle$ dce, DE = de u. CE = ce;
$\triangle$ ABD $\cong$ $\triangle$ abd, BD = bd u. AB = ab;
$\triangle$ BDE $\cong$ $\triangle$ bde, $\angle$DBE = $\angle$ dbe u. BE = be;
EBAC $\cong$ ebac, BAC = bac.

Die Gleichheit der Winkel an AD und ad folgt auf die oben erwähnte Weise.

Hier ist vorausgesetzt, daß die beiden Dreiecke mithin auch die Vierecke EBAC und ebac zusammengehörige Formen haben; man sieht aber, daß die beiden Vierecke noch eine zweite Form, nämlich EB′AC und eb′ac zulassen, also auch zwei Formen der Dreiecke möglich sind, wobei aber obige Gesetze auch für die zweiten Formen gelten. Da in der zweiten Form die Winkel DBE und dbe die Aussenwinkel sind, so folgt aus ihrer Gleichheit die Gleichheit der Supplemente, d. h. der Dreieckswinkel; ferner folgt, da ABB′D ein gleichschenkliches Dreieck, und $\angle$ DBE = $\angle$ DB′E ist, daß die Summe der beiden Winkel an AB und AB′ gleich zwei Rechten ist; endlich folgt aus der Natur obiger Vierecke, daß zwei Formen nur dann möglich sind, wenn die gleichen Winkel den kleinern Seiten gegenüber liegen.

Zusatz. Wenn in zwei körperlichen Dreiecken eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel einander gleich sind, so sind auch die übrigen Größen dieser Dreiecke gleich; wenn die Dreieckformen entsprechende sind, d. h. wenn die Summe der beiden andern gegenüberliegenden Seiten grösser oder kleiner als zwei Rechte ist.

Anmerkung. Mit Anwendung der Supplementar-Dreiecke läßt sich dieser Satz wie die obigen der Art beweisen. Auch sieht man leicht ein, daß hier nur dann zwei Formen möglich sind, wenn der der gegebenen Seite gegenüberliegende Winkel der größere ist.

§. 65.

Von den symmetrischen Dreiecken.

Erklärung. Wir haben aus Obigem gesehen, daß, wenn in zwei körperlichen Dreiecken drei Grössen einander gleich sind, es auch die übrigen sind, und daß sich daher, wenn drei Größen eines körperlichen Dreieckes bekannt sind, die übrigen sowohl durch Zeichnung als Rechnung müssen finden lassen. Nehmen wir aber auf die Ordnung Rücksicht, in welcher die gleichen Grössen in zwei Dreiecken liegen, so ist diese doppelt, entweder gleich, oder entgegengesetzt, d. h. wenn man die beiden Dreiecke mit einer gleichen Seite in einander legt, so kommt das eine nach oben, das andere mit denselben Größen nach unten, wie wenn das eine auf eine Spiegelfläche gelegt wäre, wo alsdann das andere als Bild des erstern erscheint; im ersten Falle nennen wir die Dreiecke congruent, weil sie bei gehöriger Lage vollkommen in einander passen, im andern Falle aber symmetrisch.

Wir haben daher folgende zwei Sätze:

1) **Wenn in zwei körperlichen Dreiecken drei Größen in derselben Folge einander gleich sind, und in kleiner Ordnung liegen, so sind die Dreiecke congruent.**

2) **Wenn in zwei körperlichen Dreiecken drei Größen in derselben Folge einander gleich**

sind, und in entgegengesetzter Ordnung liegen, so sind sie symmetrisch.

Neunter Satz. Lehrsatz.

In zwei symmetrischen körperlichen Dreiecken, die eine gemeinschaftliche Seite haben, liegen zwei Punkte der der gemeinschaftlichen Fläche gegenüberstehenden Kanten, die gleich weit von der Spitze entfernt sind (homologe Punkte), in gleicher Entfernung von dieser Basis auf einem einzigen Perpendikel.

Bew. Legt man in Fig. 215 durch D zwei Ebenen senkrecht auf AB und AC, so schneiden sich diese in DE, welches senkrecht auf ABC steht; macht man ferner ad = AD, und legt durch d Ebenen senkrecht auf ab und ac, so schneiden sich diese in de, welches senkrecht steht auf abc, und es ist:

$$\triangle ABD \cong \triangle abd,$$
$$\triangle CAD \cong \triangle cad,$$
$$EBAC \cong \triangle ebac$$

Legt man nun ebac genau auf EBAC, so kommt e auf E, und da sowohl DE als de senkrecht auf ABC steht, so liegen D und d in einem einzigen Perpendikel auf ABC.

Endlich ist $\triangle DBE \cong \triangle dbe$, und
$DE = de$, d. h.
D und d liegen in gleicher Entfernung von ABC.

Zusatz. Liegen in zwei körperlichen Dreiecken, die eine gemeinschaftliche Seite haben, zwei homologe Punkte der gegenüberstehenden Kanten in einem Perpendikel auf die gemeinschaftliche Basis, und zwar in gleicher Entfernung von dieser, so sind die Dreiecke symmetrisch.

Aufgaben

zum

sechsten Buche.

---

§. 66.

Erste Aufgabe.

Wenn die drei Seiten eines körperlichen Dreieckes gegeben sind, die drei Winkel zu finden.

Herstellung der Dreiecke aus drei Größen.

Auflösung. Es seyen in Fig. 217 S_1, S_2 und S_3 die drei Seiten eines abgewickelten Dreieckes, wodurch die eine Kante doppelt erscheint. Dreht man nun S_1 um AD, so beschreibt z. B. F einen Kreisbogen, dessen Radius auf AD senkrecht steht, daher FG ist, und die Projektion von F wird auf der Richtung von FG liegen.

Dreht man eben so S_3 um AE, verfolgt den nämlichen Punkt wie zuvor, d. h. macht AH = AF, so ist der Radius des Kreisbogens HI senkrecht auf AE, und die Projektion von H liegt beständig in der Richtung von HI. Nun aber schneiden sich FG und HI in L, daher haben hier die beiden Punkte ein einziges Perpendikel für ihre Projektion, lie-

gen daher selbst in einander, und GB und JL sind die Katheten rechtwinkliger Dreiecke, die die Neigungswinkel an AD und AE enthalten. Zieht man daher LM senkrecht auf GL, und LN senkrecht auf JL, macht GM = FG, und JN = HJ, so ist ∠ LGM = ∠ (AD), und ∠ LJN = ∠ (AE), zur Bestätigung dient, daß LM = LN seyn muß.

Um den dritten Winkel zu suchen, errichte man durch einen Punkt der dritten Kante Perpendikel auf diese in S_1 und S_3, d. h. man ziehe FP senkrecht auf AB, und HQ senkrecht auf AC, mache aus PQ, FP und HQ ein Dreieck, so ist ∠ PRQ = ∠ (AB) oder (AC).

Zusatz. Wenn die drei Winkel eines Dreieckes gegeben sind, die drei Seiten zu suchen. Fig. 218.

Zweite Aufgabe.

Wenn zwei Seiten und der davon gebildete Winkel gegeben sind, die dritte Seite und die beiden andern Winkel zu finden.

Auflösung. Man drehe in Fig. 219 S_3, so beschreibt z. B. H einen Bogen, dessen Radius auf AE senkrecht steht; macht man nun Winkel LJN = ∠ (S_2S_3), JN = HJ, und zieht NL senkrecht auf LJ, so ist L auch die Projektion eines Punktes der zu suchenden Kante. Zieht man nun LG senkrecht auf AD, ferner LM senkrecht auf LG und gleich LN, und zieht GM, so ist ∠ LGM = ∠ (AD). Da nun GM der Radius des zu suchenden Punktes der dritten Kante ist, so verlängert man LG bis F, so daß GF = GM wird, so ist F die Lage des zu suchenden Punktes der umgelegten dritten Kante, daher, wenn man AF zieht, ∠ FAD = S_1. Den dritten Winkel findet man auf obige Weise.

Zusatz. Wenn eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gegeben sind, den dritten Winkel und die beiden andern Seiten zu finden. Fig. 220.

Dritte Aufgabe.

Wenn eine Seite, ein anliegender und der gegenüberliegende Winkel gegeben sind, die beiden andern Seiten und den dritten Winkel zu finden.

Auflösung. Hebt man in Fig. 221 S_1 gegen die Ebene des Papiers unter dem anliegenden Winkel CBD auf, macht BD = BA, zieht DC senkrecht auf BC, ferner DE so, daß es mit CE den zweiten gegebenen Winkel bildet, so ist nur mehr die richtige Lage von CE aufzusuchen, um die zweite Seite herzustellen. Dazu denkt man sich CED senkrecht auf die Ebene des Papiers gestellt, und um CD gedreht, wodurch E einen Kreis um C beschreibt. Da nun die nächste Kante der zweiten Seite senkrecht auf EC stehen muß, so zieht man durch die Spitze des Dreieckes eine Tangente an den Kreis um C mit EC, so hat man die zweite Seite; die übrigen Größen findet man wie oben.

Wann hier zwei Fälle möglich sind, sieht man von selbst ein.

Zusatz. Wenn zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel gegeben sind, die dritte Seite und die beiden andern Winkel zu finden. Fig. 222.

Siebentes Buch.

Von den Polyedern.

§. 67.

Eintheilung der Polyeder.

Erklärung. Ein von allen Seiten begrenzter Raum heißt Körper, sind die Grenzen nur Ebenen, so heißt derselbe Polyeder, die Durchschnitte dieser Ebenen nennt man die Kanten, ihre Vereinigungspunkte die Ecken des Polyeders, die Summe aller Kantenwinkel an einem Ecke an der Oberfläche des Polyeders heißt die Größe des Eckes, und ist immer kleiner als vier Rechte.

Ist ein Körper begrenzt von zwei parallelen congruenten Flächen und eben so vielen Parallelogrammen, als diese Flächen Seiten haben, so heißt er Prisma, die beiden congruenten parallelen Flächen heißen die Grundflächen (Basen), die Parallelogramme die Seitenflächen desselben. Fig. 223.

Sind die beiden Basen nicht parallel, jedoch aber die Kanten der Seitenflächen, die alsdann Trapeze sind, so heißt der Körper ein schief abgeschnittenes Prisma. Fig. 224.

Sind nicht blos die Seitenflächen, sondern auch die Grundflächen eines Prismas Parallelogramme, heißt dasselbe ein Parallelepipedon oder Parallelepiped. Fig. 225.

Nach der Anzahl der Seiten einer Grundfläche heißt das

Prisma dreiseitig, vierseitig, vielseitig; geht aber die Grundfläche in eine krummlinige Figur über, so heißt der Körper Cylinder, und zwar Kreis-Cylinder, wenn die Grundfläche ein Kreis ist; die Verbindungslinie der beiden Mittelpunkte der Basen heißt die Axe des Cylinders. Fig. 226.

Betrachtet man daher eine krummlinige Figur als ein Polygon, so kann man auch einen Cylinder als Prisma betrachten.

Endlich werden die prismatischen Körper noch eingetheilt in senkrechte und schiefe, je nachdem die Kanten, und daher auch die Seitenflächen auf den Basen senkrecht oder schief stehen.

Die senkrechte Entfernung der beiden parallelen und congruenten Basis heißt die Höhe des Prismas.

Ist ein Körper begrenzt von einer beliebigen Ebene und so vielen Dreiecken, als die erste Ebene Seiten hat, so heißt dieser Körper eine Pyramide, die eine Fläche heißt die Grundfläche, die andern heißen die Seitenflächen, deren Spitzen sich in einem einzigen Punkte vereinigen, der die Spitze der Pyramide heißt; die Senkrechte von der Spitze auf die Richtung der Basis heißt die Höhe. Fig. 227.

Die Pyramiden werden nach der Anzahl der Seiten der Grundfläche in dreiseitige, vierseitige, vielseitige getheilt. Die dreiseitige Pyramide hat die Eigenschaft, daß man jede beliebige begrenzende Ebene als Basis annehmen kann.

Geht die Basis endlich in eine krummlinige Figur über, behält aber eine Spitze, so heißt der Körper Kegel; und kann als Pyramide betrachtet werden, wenn man die Grundfläche als Polygon betrachten will. Fig. 228.

Wird eine Pyramide parallel zur Basis durchschnitten, so entstehen zwei Theile, wovon der eine eine Pyramide ist, die die Durchschnittsfigur zur Basis hat, der andere Theil aber erhält den Namen abgekürzte Pyramide. Fig. 229.

Alle andern von Ebenen begrenzten Körper lassen sich als eine Zusammensetzung von prismatischen und pyramidischen Körpern betrachten.

Sind alle begrenzenden Ebenen eines Körpers regulär und congruent, und alle Ecken gleich groß, so heißt der Körper regulär. Es gibt deren fünf:

1) Das Tetraeder, begrenzt von vier regulären congruenten Dreiecken. Fig. 230. Jedes Eck ist 180°. Dieser Körper ist der einfachste von Allen, weil nicht weniger als drei Ebenen ein Eck bilden, und das Dreieck die einfachste Figur ist.

2) Das Oktaeder, begrenzt von acht regulären congruenten Dreiecken. Fig. 231. Jedes Eck mißt 240°.

3) Das Ikosaeder, begrenzt von zwanzig regulären congruenten Dreiecken. Fig. 232. Jedes Eck mißt 300°.

Mit regulären congruenten Dreiecken läßt sich außer obigen dreien kein regulärer Körper mehr bilden, weil sechs reguläre Dreiecke kein körperliches Eck bilden können, da ihre Winkel 360° ausmachen.

4) Das Hexaeder (Würfel), begrenzt von sechs congruenten Quadraten. Jedes Eck mißt 270°. Fig. 233.

Da vier Quadrate kein Eck mehr bilden, so ist der Würfel der einzige reguläre Körper, der von Quadraten begrenzt ist.

5) Das Dodekaeder, begrenzt von zwölf regulären Fünfecken. Jedes Eck mißt 324°. Fig. 234.

Ausser dem Dodekaeder gibt es keinen regulären von Fünfecken begrenzten Körper aus obigen Gründen. Eben deswegen gibt es keinen regulären Körper von Sechsecken u. s. w. begrenzt.

Passen zwei Polyeder bei gehöriger Lage vollkommen in einander, so daß sie dieselben Ecken, daher auch dieselben Kanten und begrenzenden Ebenen haben, so heißen sie con-

gruent; dieses wird aber der Fall seyn, wenn in ihnen alle Größen gleich sind, und in derselben Ordnung liegen. Sind in zwei Körpern alle Größen einander gleich, die Ordnung aber, wie sie auf einander folgen, umgekehrt, wie in einem Körper und dessen Bilde im Spiegel, so nennt man sie symmetrische Körper.

§. 68.

Erster Satz. Lehrsatz.

Zwei Prismen sind congruent, wenn in ihnen drei in einem Punkte zusammenstehende Ebenen congruent sind, und dabei in gleicher Ordnung liegen. Congruenz der Polyeder.

Fig. 235. Dat. $\begin{cases} ABCD \cong abcd, \\ DHFB \cong dhfb, \\ AEFB \cong aefb; \end{cases}$

Thes. Pr. $\cong$ pr.

Bew. Legt man abcd genau auf ABCD, was möglich ist, da beide Figuren conguent sind, so müssen dhfb und aefb in die Richtungen von DHFB und AEFB fallen, weil ihre Winkel gegen ABCD gleich sind (S. VI. Buch, V. Satz), und sie in beiden Figuren in derselben Ordnung liegen, ferner decken sie einander, weil sie congruent sind; ebenso fällt efhg in die Richtung von EFHG, weil sie drei Punkte gemein haben, und decken sich, weil sie congruent sind; endlich fällt cdhg in die Lage von CDHG, weil sie drei Punkte gemein haben, und decken sich, weil sie überdieß Parallelogramme sind; dieses gilt von allen Seitenflächen, daher ist

Pr. $\cong$ pr.

Zusatz. Zwei Pyramiden sind congruent, wenn in ih-

nen drei in einem Punkte zusammenstehende Flächen, die in beiden Körpern in derselben Ordnung liegen, congruent sind.

§. 69.

Von den symmetrischen Polyedern.

Erklärung. Denkt man sich von allen Ecken eines Körpers Perpendikel auf eine Ebene, ferner alle diese Perpendikel um ihre Größe unter die Ebene verlängert, die Punkte ebenso, wie im Körper selbst verbunden, so entsteht ein neuer Körper, der mit dem ersten **symmetrisch** ist. Fig. 236.

Zweiter Satz. Lehrsatz.

In zwei symmetrischen Körpern sind: 1) alle Kanten, 2) ihre Winkel, 3) alle Neigungswinkel der Seitenflächen zu einander, 4) alle Ecken gleich, und 5) alle begrenzenden Flächen congruent.

Bew. Je zwei homologe Kanten sind Seiten von congruenten Trapezen, daher einander gleich.

Da dieses auch von allen Diagonallinien der begrenzenden Flächen gilt, so bestehen je zwei homologe Seitenflächen aus lauter congruenten Dreiecken, daher sind die Winkel dieser Ebenen einander gleich.

Denkt man sich durch je zwei solche Kanten Ebenen gelegt, so daß lauter körperliche Dreiecke entstehen, so sind in je zwei homologen Dreiecken die Neigungswinkel der Flächen einander gleich, weil die Seiten gleich sind, und überdieß folgt daraus, daß alle homologen Punkte, die im ersten Körper in einer Ebene liegen, im zweiten Körper sich ebenfalls in einer einzigen Ebene befinden.

Da alle Kantenwinkel einander gleich sind, so folgt daraus die Gleichheit von je zwei homologen körperlichen Ecken.

Da endlich in je zwei begrenzenden Ebenen alle Seiten

und Winkel einander gleich sind, und diese sämmtlich in beiden Körpern in einer Ebene liegen, so sind die homologen begrenzenden Ebenen congruent.

§. 70.

Dritter Satz. Lehrsatz.

In jedem Parallelepipedon sind zwei gegenüberstehende Seitenflächen congruent und parallel. Vom Parallelepipedon und der Größe der Prismen.

Bew. Die gegenüberstehenden Kanten als Seiten eines Parallelogramms sind gleich und parallel; aus ihrem Parallelismus folgt aber erstens die Gleichheit der Winkel, daher sind je zwei gegenüberstehende Seitenflächen congruent, zweitens folgt daraus der Parallelismus zweier solcher Seitenflächen.

Erklärung. Da in einem Parallelepipedon zwei gegenüberstehende Seitenflächen die nämlichen Eigenschaften haben, die den beiden Basen eines Prismas zukommen, so läßt sich obiger Satz auch so ausdrücken:

In einem Parallelepipedon darf man jede Seitenfläche als Grundfläche annehmen.

Anmerkung. Jede Ebene, die durch zwei gegenüberstehende Kanten gelegt wird, heißt Diagonalebene.

Vierter Satz. Lehrsatz.

Jedes senkrechte Parallelepipedon wird durch eine Diagonalebene in zwei congruente dreiseitige Prismen zertheilt.

Bew. Legt man in Fig. 237. △ CDB genau auf △ ABC, so fällt die Kante DH genau auf AC, die Kante BF auf CG, und die Kante CG auf BF, weil es durch ei-

nen Punkt einer Ebene nur ein Perpendikel auf diese gibt, daher fallen die beiden Prismen vollkommen in einander und sind congruent.

Fünfter Satz. Lehrsatz.

Jedes schiefwinklige Parallelepipedon wird durch eine Diagonalebene in zwei symmetrische dreiseitige Prismen zertheilt, die einander gleich sind.

Bew. Legt man in Fig. 238 △ CDB auf △ ABC, so kommt die Kante DH nicht in die Richtung der Kante AE, weil HD unter einem stumpfen Winkel zu BD, und AE unter einem spitzen Winkel zu AC geneigt ist. Legt man aber △ GHF auf △ ABC, so kommen die Kanten des zweiten Prismas abwärts von ABC zu liegen, und die beiden Prismen sind symmetrisch, weil in ihnen alle Größen gleich und nur die Ordnung ihrer Lage umgekehrt ist.

Legt man ferner in Fig. 239 durch H eine Ebene senkrecht auf die Kanten, und ebenso durch D auf die verlängerten Kanten, so sind sowohl der ganz oben abgeschnittene Körper als auch die Theile auf beiden Seiten der Diagonalebene dem untern angesetzten ganzen Körper und seinen Theilen einzeln congruent, weil in ihnen alle Größen in derselben Ordnung liegen und einander congruent sind. Nun bildet der übrige Theil des ursprünglichen Parallelepipedon mit dem untern angesetzten Körper ein senkrechtes Parallelepipedon, und dessen Theile zwei senkrechte dreiseitige Prismen, die einander congruent sind.

Denkt man nun die untern Theile der dreiseitigen Prismen wieder weg, und dafür die obern gleichen dazu, so erhält man die Gleichheit der beiden symmetrischen Prismen.

Sechster Satz. Lehrsatz.

Zwei Parallelepipeda von einerlei Grundfläche und gleichen Höhen, die überdieß noch zwischen zwei parallelen Ebenen eingeschlossen sind, sind einander gleich.

Bew. Es ist in Fig. 240

$$\begin{array}{rcl} AEIDGM & \cong & BFKCHL \\ NFIOHM & = & NFIOHM \\ \hline AEFNDGHO & = & BNIKCOML \\ ANBDOC & = & ANBDOC \\ ACEH & = & ACIL. \end{array}$$

I. Zusatz. Zwei Parallelepipeda von einerlei Grundfläche und gleichen Höhen sind einander gleich, auch wenn sie nicht zwischen parallelen Ebenen liegen.

Bew. Denkt man sich in Fig. 241 zuerst die Seitenflächen CF und AH, alsdann die beiden Seitenflächen AJ und BL, und endlich die obere Basis GF erweitert, so liegt zwischen den vier Durchschnittslinien der erweiterten Seitenflächen und der Basis ein Parallelepipedon, das sowohl mit dem ersten als zweiten Grundfläche und Höhe gemein hat, und mit jedem zwischen zwei parallelen Ebenen liegt; da demnach dieses Parallelepipedon jedem der beiden gegebenen gleich ist, so sind auch diese beiden Parallelepipeda einander gleich.

II. Zusatz. Zwei Parallelepipeda von gleichen Höhen und solchen Grundflächen, die gleiche Grundlinie und Höhe haben, sind einander gleich.

Bew. Denkt man sich in Fig. 242 CDEH als Basis, so haben die beiden Parallelepipeda ADGH und JDLH einerlei Grundfläche und gleiche Höhen, und sind daher einander gleich.

III. Zusatz. Zwei dreiseitige Prismen von gleichen Höhen und solchen Grundflächen, die gleiche Grundlinie und Höhe haben, sind einander gleich.

Siebenter Satz. Lehrsatz.

Zwei Prismen von gleichen Grundflächen und Höhen sind einander gleich.

Bew. Zieht man in Fig. 243 die Diagonalebene GO, legt durch NJ dazu eine parallele Ebene, was möglich ist, da NJ # GO ist, die von der Erweiterung der GM in PQ geschnitten wird, und zieht die Ebene PO, so ist das dreiseitige Prisma auf PKG gleich dem dreiseitigen Prisma auf JKG, daher auch das Prisma auf PKH gleich dem Prisma auf JKHG, d. h. das vierseitige Prisma ist in ein gleiches dreiseitiges verwandelt.

Verwandelt man durch dieselbe Construktion eines dieser dreiseitigen Prismen in ein anders, so daß die beiden Basen gleiche Grundlinie erhalten, so werden sie auch gleich hoch, weil sie einander gleich sind, daher werden auch die beiden Prismen einander gleich, da aber diese Prismen den gegebenen gleich sind, so sind auch die gegebenen Prismen einander gleich.

§. 71.

Achter Satz. Lehrsatz.

Von dem Verhältnisse der Prismen.

Zwei Prismen von gleichen Grundflächen verhalten sich wie ihre Höhen.

Bew. Werden die beiden Höhen in Fig. 244 mit einer und derselben Maßeinheit gemessen, und durch alle Theilungspunkte die Ebenen parallel zu den Basen gelegt, so werden auch die beiden Prismen in lauter gleiche Theile getheilt, und zwar so, daß jeder Theil des ersten Prismas jedem Theile des zweiten

Prismas gleich ist, und überdieß wird jedes Prisma in eben so viele Theile getheilt, als die Höhe Theile hat, daher ist, wenn man die Anzahl der Theile der Höhen mit m und n bezeichnet:

$$H : h = m : n$$
$$Pr. : pr. = m : n$$
$$\overline{}$$
$$Pr. : pr. = H : h$$

Zusatz. Zwei Parallelepipeda mit zwei gleichen Dimensionen verhalten sich zu einander, wie die beiden ungleichen Dimensionen.

Anmerkung. Die senkrechte Entfernung zweier Seitenflächen eines Parallelepipedons nennt man Breite, die der beiden andern alsdann die Länge.

Neunter Satz. Lehrsatz.

Zwei Parallelepipeda von gleichen Höhen verhalten sich wie die Produkte aus den Breiten und Längen.

Bew. Nimmt man in Fig. 245 ein Hilfsparallelepipedon an, das mit den ersten die Höhe und Breite, mit dem andern die Höhe und Länge gemein hat, und bezeichnet dessen Größe durch P', so ist

$$P : P' = L : l,$$
$$P' : p = B : b$$
$$\overline{}$$
$$P : p = B . L : b . l.$$

Zusatz. Zwei Prismen von gleichen Höhen verhalten sich wie ihre Basen.

Zehnter Satz. Lehrsatz.

Zwei Parallelepipeda verhalten sich wie die Produkte aus den Längen, Breiten und Höhen.

Bew. Nimmt man in Fig 246 ein Hilfsparallelepipedon an, das mit dem ersten die Höhe, und mit dem zweiten die Breite und Länge gemein hat, und bezeichnet dessen Größe durch P′, so ist

$$\begin{aligned} P : P' &= B \,.\, L : b \,.\, l \\ P' : p &= H : h \\ \hline P : p &= B \,.\, L \,.\, H : b \,.\, l \,.\, h. \end{aligned}$$

Zusatz. Zwei Prismen verhalten sich zu einander, wie die Produkte aus den Basen und den Höhen.

Erklärung. Will man daher ein Prisma durch ein anderes messen, d. h. suchen, wie oft ein Prisma in einem andern Prisma enthalten ist, oder suchen, wie viele solche Prismen, wie ein gegebenes ist, man aus einem andern machen kann, so darf man nur nach den Gesetzen der ebenen Geometrie die beiden Basen berechnen, die Höhen messen, und alsdann mit dem einen Produkte in das andere dividiren.

Gewöhnlich nimmt man aber das senkrechte rechtwinklige Parallelepipedon, das die Einheit, womit die Demensionen des Gegebenen gemessen werden, zur Länge, Breite und Höhe hat, d. h. den Würfel der Maßeinheit als körperliche Einheit an, und in diesem Falle nennt man die auf obige Weise erhaltene Zahl den Inhalt des Prismas.

Bezeichnet man diesen Würfel mit K, so ist

$$Pr. : K = B \,.\, H : 1, \text{ oder}$$

$$\frac{Pr.}{K} = B \,.\, H, \text{ oder}$$

$$Pr. = B \,.\, H \,.\, K = B \,.\, H.$$

In dieser Beziehung sagt man: Der Inhalt eines Prismas ist gleich dem Produkte aus Basis und Höhe.

Aus dem so eben Erwähnten, und aus dem, was bei dem Inhalte der Flächen gesagt wurde, sieht man den Zu-

sammenhang der gebräuchlichen Längen-, Flächen- und Körper-Einheiten, zugleich aber sieht man, welche Vereinfachung aus diesem Zusammenhange für die Berechnung der Flächen und Körper hervorgeht. Wollte man hingegen eine andere Fläche als das Quadrat der Längeneinheit als Flächeneinheit, und einen andern Körper, als den Würfel der Längeneinheit als Körpereinheit annehmen, müßte man sich bei Berechnung des Inhaltes stets an die gefundenen Proportionen halten.

I. Zusatz. Der Inhalt eines Kubus ist gleich der dritten Potenz seiner Seite.

II. Zusatz. Der Inhalt eines Cylinders, ist gleich dem Produkte aus Basis und Höhe, d. h.

$$C = R^2\pi h.$$

§. 72

Eilfter Satz. Lehrsatz.

Wenn man eine Pyramide parallel zur Basis durchschneidet, so ist die Durchschnittsfigur der Basis ähnlich. Eigenschaften der Pyramide.

Fig. 229. Dat. AC # EG;
Thes. AC ∽ EG.

Bew. Da AC # EG ist, so sind alle Seiten als Durchschnitte der Seitenebenen mit den parallelen Ebenen selbst parallel, d. h. AB # EF, BC # FG u. s. w., und daraus folgt:

$\angle$ ABC $=$ $\angle$ EFG,
$\angle$ BCD $=$ $\angle$ FGH.
u. s. w.

Ferner ist:

AB : EF = BP : FP = BC : FG = CP : GP = CD : GH. . .

Oder: $AB : EF = BC : FG = CD : GH \ldots$

Da nun in beiden Figuren alle Winkel gleich, und alle Seiten proportionirt sind, so ist

$$AC \backsim GE.$$

Anmerkung. Aus diesem Satze ersieht man die Haupteigenschaft einer abgekürzten Pyramide, nämlich, daß die beiden Basen einander ähnlich sind: umgekehrt kann man daher auch annehmen, daß in einem Körper, dessen zwei parallele Basen einander ähnlich sind, die Verlängerungen der Kanten in einem Punkte zusammentreffen, d. h. daß der Körper eine abgekürzte Pyramide sey.

Zwölfter Satz. Lehrsatz.

Die beiden Basen einer abgekürzten Pyramide verhalten sich zu einander, wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze.

Bew. Da in Fig. 229 $AC \backsim EG$ ist, so ist

$AC : EG = AB^2 : EF^2 = AP^2 : EP^2$; zieht man nun die Höhen PNM, und die Linien FM und EN, so ist

$AP : EP = PM : PN$. daher

$AC : EG = PM^2 : PN.^2$

I. Zusatz. Aus den beiden Basen einer abgekürzten Pyramide und deren senkrechter Entfernung die Ergänzung dieser Entfernung bis zur Spitze zu finden.

Auflösung. Bezeichnet man die beiden Basen durch B und b, ihre senkrechte Entfernung durch h, und deren Ergänzung bis zur Spitze durch x, so ist

$$B : b = (h + x)^2 : x,^2 \text{ oder}$$

$$\sqrt{B} : \sqrt{b} = h + x : x, \text{ daraus}$$

$$x\sqrt{B} = h\sqrt{b} + x\sqrt{b}$$

$$x(\sqrt{B} - \sqrt{b}) = h\sqrt{b}$$

$$x = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} \text{ oder}$$

$$x = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B}-\sqrt{b}} \cdot \frac{\sqrt{B}+\sqrt{b}}{\sqrt{B}+\sqrt{b}}$$

$$x = \frac{h\sqrt{Bb} + hb}{B - b}$$

II. Zusatz. Wenn man zwei Pyramiden von gleichen Basen und Höhen in gleichen Entfernungen von der Spitze durchschneidet, so sind die beiden Durchschnittsfiguren einander gleich.

Dat. Fig. 247. $\left\{ \begin{array}{l} ABC = DEFG, \\ pM = PN, \\ pm = Pn; \\ abc = defg. \end{array} \right.$ Thes.

Bew. Es ist:

$$\triangle ABC : \triangle abc = pM^2 : pm^2$$
$$DEFG : defg = PN^2 : Pn,^2$$
$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$
$$\triangle abc = defg.$$

§. 73.

Dreizehnter Satz. Lehrsatz.

Von der Größe und dem Inhalte der Pyramiden.

Pyramiden von gleichen Basen und Höhen sind einander gleich.

Bew. Theilt man in Fig. 248 die beiden gleichen Höhen in gleiche Theile, legt durch die Theilungspunkte Ebenen parallel zu den Basen, errichtet ferner in der ersten Pyramide auf der Basis ein Prisma aufwärts bis zur ersten durchgelegten Ebene, ferner in der zweiten Pyramide auf die erste Durchschnittsfigur nach unten ein Prisma bis zur Basis, und

fährt in dieser Construktion fort, so bilden sich auf der Basis und den Durchschnittsfiguren der ersten Pyramide lauter auswärtsgehende, auf denen der zweiten Pyramide lauter einwärtsgehende Prismen.

Nun ist das erste Prisma der zweiten Pyramide gleich dem zweiten Prisma in der ersten Pyramide, ebenso das zweite gleich dem dritten, u. s. f. daher ist die Summe der Prismen der ersten Pyramide größer, als die Summe der Prismen der zweiten Pyramide, und zwar um das erste Prisma der ersten Pyramide.

Da man aber die Theile der Höhen beliebig klein machen ann, wodurch die Durchschnittsfiguren sehr nahe zusammenkommen, so werden offenbar auch die beiden Prismen-Summen beliebig nahe einander gleich; da aber die zweite Pyramide größer ist als ihre Prismensumme, so kann die zweite Pyramide nicht kleiner seyn, als die erste Prismensumme, um soweniger daher kleiner als die erste Pyramide, weil diese kleiner ist als ihre Prismensumme. Ebenso kann gezeigt werden, daß die erste Pyramide nicht kleiner seyn kann, als die zweite.

Da nun keine von beiden Pyramiden kleiner seyn kann als die andere, so sind sie einander gleich.

Anmerkung. Zur Erkenntniß der Wahrheit dieses Satzes würde übrigens der Satz: Wenn man zwei Pyramiden von gleichen Basen und Höhen in gleichen Entfernungen von der Basis durchschneidet, so sind die beiden Durchschnittsfiguren ebenfalls einander gleich, schon genügen; denn denkt man sich so zu sagen lauter gleiche Flächenpaare aufeinander gelegt, so werden die dadurch entstehenden Körper ebenfalls einander gleich.

Oder denkt man sich zum Behufe der Vorstellung lauter ganz dünne prismatische Platten von gleichen Basen und Höhen, die immer kleiner werden, jedoch so, daß alle gleichnamigen Ecken auf einer einzigen Geraden liegen, so erhält man gleiche Prismensummen, die um so mehr den Pyramiden gleich werden, je dünner man sie denkt; da also

diese Prismensummen vollkommen einander gleich sind, und den Pyramiden an Größe beliebig nahe seyn können, so sind auch die Pyramiden einander gleich.

I. Zusatz. Abgekürzte Pyramiden von gleichen Basen und Höhen sind einander gleich.

II. Zusatz. Die Spitze einer Pyramide darf man parallel zur Basis versetzen, ohne daß die Größe derselben geändert wird.

Vierzehnter Satz. Lehrsatz.

Jedes dreiseitige Prisma läßt sich in drei gleiche Pyramiden zerlegen, die gleiche Basis und Höhe mit dem Prisma haben.

Bew. Schneidet man in Fig. 249 mit einer Ebene bei F in den Körper, und bei AB heraus, so wird die Pyramide mit der Basis ABC und der Spitze F abgeschnitten, und der Rest ist eine vierseitige Pyramide mit der Basis ADEB und der Spitze F.

Schneidet man nun mit einer Ebene durch FDB, so entstehen die beiden dreiseitigen Pyramiden ABD mit der Spitze F, und DBE mit der Spitze F, die einander gleich sind, weil sie gleiche Basen und eine gemeinschaftliche Höhe haben. Stellt man aber die Pyramide DBEF auf die Basis DEF, so erhält sie B zur Spitze, und hat so mit dem Prisma gleiche Basis und Höhe, so wie mit der ersten Pyramide, der sie daher gleich ist. Mithin sind alle drei Pyramiden einander gleich, und zwei davon haben mit dem Prisma gleiche Basis und Höhe.

Anmerkung. Um auch noch einzusehen, daß die dritte Pyramide leicht in eine solche zu verwandeln ist, die mit dem Prisma gleiche

Basis und Höhe hat, darf man blos die Spitze F parallel zu ABD, also auf der Geraden FC nach C versetzen, so heißt die Pyramide ABD mit der Spitze C. Denkt man sich diese Pyramide auf die Seitenfläche ABC gestellt, so wird D die Spitze, und die Pyramide hat gleiche Basis und Höhe mit dem Prisma.

I. Zusatz. Der Inhalt einer Pyramide ist gleich dem dritten Theile von dem Produkte aus Basis und Höhe, oder

$$P = \frac{1}{3} Bh.$$

II. Zusatz. Pyramiden von gleichen Basen verhalten sich wie ihre Höhen, von gleichen Höhen wie ihre Basen, und Pyramiden überhaupt verhalten sich wie die Produkte aus den Basen in die Höhen.

III. Zusatz. Der Inhalt eines Kegels ist gleich der Basis multiplizirt mit der Höhe dividirt durch 3, daher der eines Kreiskegels gleich

$$\frac{1}{3} R^2 \pi h.$$

Fünfzehnter Satz. Lehrsatz.

Eine abgekürzte Pyramide ist gleich drei Pyramiden, von denen die eine die größere Basis, die andere die kleinere Basis, die dritte das geometrische Mittel aus den Basen der abgekürzten Pyramide zur Basis, alle drei aber die Höhe derselben haben.

Bew. Schneidet man in Fig. 250. mit einer Ebene durch FAB, so ist der abgeschnittene Theil die erste verlangte Pyramide, und der Rest ist eine vierseitige Pyramide mit der Basis ADEB und der Spitze F.

Schneidet man ferner mit einer Ebene durch FDB, und stellt die Pyramide DBE mit der Spitze F auf das Dreieck DEF, so erhält sie B zur Spitze, und ist daher die zweite verlangte Pyramide. Verschiebt man endlich in der dritten Pyramide die Spitze F parallel mit ABD, also auf den Geraden FG, so heißt die Pyramide ABD mit der Spitze G. Nimmt man nun ABG zur Basis, so wird D die Spitze, und die Pyramide hat die verlangte Höhe. In Bezug auf die Basis aber ist

$$\triangle ABC : \triangle ABG = AC : AG = AC : DF,$$

$$\triangle ABG : \triangle DEF = AB.AG : DE.DF = AB : DE,$$

da aber $AC : DF = AB : DE$ ($\triangle ABC \backsim \triangle DEF$)

so ist $\triangle ABC : \triangle ABG = \triangle ABG : \triangle DEF$, d. h. die Basis der dritten Pyramide ist das geometrische Mittel zwischen den beiden Basen der abgekürzten Pyramide.

I. Zusatz. Bezeichnet man die Inhalte der beiden Basen mit B und b, die Höhe mit h, so ist

$$P = \tfrac{1}{3} Bh + \tfrac{1}{3} bh + \tfrac{1}{3} h \sqrt{Bb}, \text{ oder}$$

$$P = \tfrac{1}{3} h (B + b + \sqrt{Bb}).$$

Anmerkung. Den Inhalt einer abgekürzten Pyramide findet man aber auch noch dadurch, daß man den Inhalt der Ergänzungspyramide vom dem der ganzen Pyramide abzieht. Nun ist aber die Basis der erstern b, die Höhe $x = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} = \frac{h\sqrt{Bb} + hb}{B - ba}$,

daher ihr Inhalt:

$$\tfrac{1}{3} bx;$$

der Inhalt der ganzen Pyramide aber ist:

$$\tfrac{1}{3} B (h + x),$$

daher der der abgekürzten Pyramide:

$$P = \tfrac{1}{3} B (h + x) - \tfrac{1}{3} bx$$

$$P = \frac{1}{3}\,(Bh + (B-b)\,x),$$

$$= \frac{1}{3}\,\left(Bh + (B-b)\,\frac{h\sqrt{Bb} + hb}{B - b}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\,(Bh + h\sqrt{Bb} + hb)$$

$$P = \frac{1}{3}\,h\,(B + b + \sqrt{Bb}).$$

II. Zusatz. Die Größe eines abgekürzten Kegels ist gleich der Größe dreier Kegel, von derselben Höhe, wovon einer den größern Kreis, der andere den kleinern Kreis, der dritte aber einen Kreis zur Basis hat, der das geometrische Mittel aus den beiden Kreisen ist, d. h. dessen Radius das geometrische Mittel aus den beiden Radien ist.

III. Zusatz. Der Inhalt eines abgekürzten Kegels ist:

$$K = \tfrac{1}{3}R^2\pi h + \tfrac{1}{3}r^2\pi h + \tfrac{1}{3}Rr\pi h,$$

oder $$K = \tfrac{1}{3}\pi h\,(R^2 + r^2 + Rr).$$

IV. Zusatz. Der Inhalt eines dreiseitigen schief abgeschnittenen Prismas ist gleich dem Produkte aus der Basis und dem arithmetischen Mittel aus den Entfernungen der drei Ecken von der Basis.

Bew. Schneidet man in Fig. 251 mit einer Ebene durch FAB, so wird die Pyramide ABCF abgeschnitten, und ihr Inhalt ist, wenn man diese Höhe mit h′ bezeichnet:

$$\tfrac{1}{3}\,Bh.'$$

Schneidet man ferner mit einer Ebene durch FDB, verschiebt die Spitze F der Pyramide ABDF nach C, so wird D die Spitze, und der Inhalt dieser Pyramide ist:

$$\tfrac{1}{3}\,Bh.''$$

Verschiebt man ebenso die Spitze F der dritten Pyramide BDEF nach C, nimmt BEC als Basis an, und verschiebt endlich die neue Spitze D parallel BCE, also auf DA nach A, so kann man ABC als Basis annehmen, und es wird die Spitze E, daher ist der Inhalt dieser Pyramide:

$\frac{1}{3}$ Bh.‴

Der Inhalt des Prismas ist daher:

$$P = \frac{1}{3} Bh' + \frac{1}{3} Bh'' + \frac{1}{3} Bh,''' \text{ oder}$$

$$P = \frac{1}{3} B (h' + h'' + h'''), \text{ oder}$$

$$P = B \frac{(h' + h'' + h''')}{3}.$$

§. 74.

Erklärung. Da die Oberflächen der Prismen und Pyramiden aus ebenen Figuren bestehen, so hat man nur nach den Regeln der ebenen Geometrie die Inhalte der einzelnen begrenzenden Figuren zu berechnen, nachdem man die nöthigen Maße genommen hat, und diese sämmtlich zu addiren. Einer besondern Betrachtung sind daher nur die krumen Oberflächen des Cylinders und des Kegels, die man Mäntel nennt, zu unterwerfen. Von den Oberflächen der Prismen und Pyramiden.

Sechzehnter Satz. Lehrsatz.

Der Mantel eines Cylinders ist gleich einem Rechtecke, dessen Höhe der Höhe des Cylinders, und dessen Grundlinie der Peripherie der Cylinderbasis gleich ist.

Bew. Denkt man sich zum Behufe der Vorstellung den Mantel eines Cylinders nach einer geraden Linie aufgeschnitten, was möglich ist, da derselbe durch eine Gerade erzeugt wird, und auf einer Ebene abgewickelt, so entsteht ein Rechteck, dessen Höhe gleich ist der Höhe des Cylinders, und dessen Basis gleich ist der Peripherie der Cylinderbasis.

Zusatz. Der Inhalt eines Cylindermantels ist:

$$M = 2\,R\pi h.$$

Die ganze Oberfläche:

$$O = 2R^2\pi + 2\,R\pi h,$$
$$= 2\,R\pi\,(R + h).$$

Siebenzehnter Satz. Lehrsatz.

Der Mantel eines Kegels ist gleich einem Dreiecke, dessen Höhe gleich ist der Seite des Kegels, und dessen Grundlinie gleich ist der Peripherie der Kegelbasis.

Bew. Der Kegelmantel entsteht ebenfalls durch die Bewegung einer Geraden, und kann daher zum Behufe der Vorstellung nach einer Geraden getrennt werden, die die Seite des Kegels heißt, denkt man sich alsdann den Mantel abgewickelt, so entsteht ein Kreissektor, dessen Radius die Seite des Kegels, und dessen Bogen die Peripherie der Kegelbasis ist. Da aber der Inhalt eines Kreissektors gleich ist einem Dreiecke, dessen Höhe dem Radius, und dessen Grundlinie dem Bogen gleich ist, so ist der Kegelmantel gleich dem verlangten Dreiecke.

Zusatz. Der Inhalt eines Kegelmantels ist, wenn man die Seite mit a bezeichnet.

$$M = R\pi a = R\pi \sqrt{h^2 + R^2}.$$

Achtzehnter Satz. Lehrsatz.

Der Inhalt des Mantels eines abgekürzten Kegels ist gleich der mittlern Peripherie multiplizirt mit der Seite.

Bew. Aus obigem Satze sieht man, daß der Inhalt eines abgekürzten Kegelmantels gleich ist der Differenz zweier

Sektoren, oder zweier Dreiecke, oder gleich ist einem Trapeze, dessen parallele Seiten die Periphirien und dessen Höhe die Seite des Kegels ist, daher ist in Fig. 252:

$$M = \frac{(2\,R\pi + 2\,r\pi)\,a}{2} = \frac{(R + r)}{2}\,2\,a\,\pi.$$

Halbirt man nun h und a, und verbindet die beiden Halbirungspunkte, so ist m der Radius der mittlern Peripherie, und

$$m = \frac{R + r}{2}, \text{ daher}$$

$$M = 2\,m\pi a = 2\,m\pi\,\sqrt{h^2 + (R - r^2)}.$$

§. 75.

Neunzehnter Satz. Lehrsatz.

Zwei symmetrische Polyeder sind einander gleich. Größe der symmetrischen Polyeder.

Bew. Oben haben wir schon gezeigt, daß zwei symmetrische dreiseitige Prismen einander gleich sind, woraus die Gleichheit der mehrseitigen symmetrischen Prismen folgt.

Nachdem wir nun auch noch wissen, daß eine Pyramide der dritte Theil eines Prismas von gleicher Basis und Höhe ist, so sind auch symmetrische Pyramiden einander gleich.

Hat man endlich zwei symmetrische Polyeder, so kann man dieselben in symmetrische Pyramiden zertheilt denken, woraus die Gleichheit zweier symmetrischer Polyeder überhaupt folgt.

§. 76.

Zwanzigster Satz. Lehrsatz.

Von der Form der Körper, und dem Verhältniße der ähnlichen.

Wenn in zwei dreiseitigen Pyramiden drei begrenzende Flächen einander ähnlich sind, so sind es auch die vierten.

Fig. 253.

Dat. $\begin{cases} \triangle ABC \backsim \triangle abc, \\ \triangle ACD \backsim \triangle acd, \\ \triangle ABD \backsim \triangle abd; \end{cases}$

Thes. $\triangle CBD \backsim \triangle cbd.$

Bew. Da aus den Daten alle Seiten des körperlichen Dreieckes A einzeln den Seiten des körperlichen Dreieckes a gleich sind, so sind auch die Neigungswinkel der Seiten zu einander gleich.

Daraus und aus den Daten folgt, daß in den beiden Ecken an C und c, und ebenso in denen an B und b zwei Seiten und die davon eingeschlossenen Winkel einander gleich sind, nämlich:

$$\angle ACB = \angle acb,$$
$$\angle ACD = \angle acd,$$
$$\angle (AC) = \angle (ac),$$

woraus hervorgeht, daß

$$\angle DCB = \angle dcb,$$
und $\angle CBD = < cbd,$

$$\triangle CBD \backsim \triangle cbd \text{ ist.}$$

Erklärung. Wenn in zwei dreiseitigen Pyramiden drei Seiten einander gleich sind, und in gleicher Ordnung liegen, so nennen wir die beiden Pyramiden **ähnlich**; liegen aber diese Seiten in umgekehrter Ordnung, so nennen wir die Pyramiden **symmetrisch ähnlich**. Polyeder überhaupt aber nennen wir

ähnlich, wenn sie aus ähnlichen dreiseitigen Pyramiden bestehen. Da aber in diesen auch die vierten Flächen einander ähnlich sind, so sind in ähnlichen Polyedern alle Seiten- und Diagonal-Ebenen einander ähnlich. Umgekehrt dürfen wir daher auch der Kürze wegen sagen, Fig. 254.

Zwei Polyeder sind einander ähnlich, wenn in ihnen alle begrenzten Ebenen ähnlich sind, und in gleicher Ordnung liegen; obwohl in dieser Definition Merkmale enthalten sind, die eine Folge von den andern sind.

Wollte man alle diejenigen Gesetze aufsuchen, aus denen die Aehnlichkeit dreier Seiten für eine dreiseitige Pyramide hergeleitet werden kann, z. B. Wenn in zwei Pyramiden die Grundflächen ähnlich und die Neigungswinkel aller Seitenflächen gegen die Grundfläche einander gleich sind, so sind die Pyramiden ähnlich, so würde man alle Kriterien der Aehnlichkeit der Körper erhalten. Die Zurückführung auf die Aehnlichkeit von drei Seiten für die Pyramiden, und auf die Aehnlichkeit der Pyramiden für Polyeder ist mit den bisherigen Hilfsmitteln leicht.

Liegen die die gleiche Form der Körper bestimmenden Größen für zwei Körper gegenseitig in umgekehrter Ordnung, so heißen die Körper symmetrisch ähnlich.

Ein und zwanzigster Satz. Lehrsatz.

Zwei ähnliche dreiseitige Pyramiden verhalten sich zu einander wie die Kubuse zweier gleichliegender Kanten.

Dat. $K \backsim k$;

Fig. 255.

Thes. $K : k = S^3 : s^3$.

Bew. Zieht man die Höhen, DE und de, f Verbindungslinien AE und ae, so ist:

$$K : k = B . H : b . h,$$

ferner ist:

$$B : b = AC^2 : ac^2 = AD^2 : ad^2$$

$$H : h = AD : ad,$$

$$B . H : b.h = AD^3 : ad^3, \text{ daher}$$

$$K : k = AD^3 : ad^3, \text{ oder}$$

$$K : k = S^3 : s^3.$$

I. Zusatz. Zwei symmetrisch ähnliche dreiseitige Pyramiden verhalten sich wie die Würfel zweier Kanten.

II. Zusatz. Zwei ähnliche Polyeder verhalten sich zu einander wie die Würfel zweier gleichliegender Kanten oder Diagonallinien.

III. Zusatz. Symmetrisch ähnliche Polyeder verhalten sich wie die Kubus zweier homologen Kanten oder Diagonallinien.

Achtes Buch.

Von der Kugel.

§. 77.

Erklärung. Ein Körper, dessen begrenzende Oberfläche in allen ihren Punkten von einem und demselben Punkte gleich weit entfernt sind, heißt Kugel, der Punkt, von dem aus die Entfernungen der Punkte der Oberfläche gleich sind, heißt der Mittelpunkt oder das Centrum derselben, eine solche Entfernung selbst Radius oder Halbmesser der Kugel; verlängert man den Radius rückwärts bis an die Oberfläche, so heißt die ganze Linie Durchmesser. Eine Kugel und ihre Oberfläche kann man sich dadurch entstanden denken, daß sich ein Halbkreis um seinen Durchmesser dreht. Betrachtet man daher den Halbkreis als ein Aggregat von lauter kleinen geraden Linien, so ist die Oberfläche der Kugel ein Aggregat von eben so vielen abgekürzten Kegelmänteln mit sehr kleinen Höhen, und die Kugel selbst ein Aggregat von eben so vielen abgekürzten Kegeln. Definition und Eigenschaften der Kugel.

Erster Satz. Lehrsatz.

Eine Ebene schneidet die Oberfläche einer Kugel in einem Kreise.

Bew. Zieht man in Fig. 256 MA senkrecht auf die Schnittfigur, zieht ferner in dieser die beiden Geraden AB und AC, ebenso die Radien der Kugel MB und MC, so ist

$$\triangle MAB \cong \triangle MAC, \text{ und}$$

$$AB = AC.$$

Da dieses aber von jeder Geraden von A nach der Peripherie der Durchschnittsfigur gilt, so ist letztere ein Kreis, wovon A der Mittelpunkt ist.

Erklärung. Geht der Schnitt einer Ebene und einer Kugel durch den Mittelpunkt der letztern, so heißt die Durchschnittsfigur ein größter Kreis, und man sieht, daß der Mittelpunkt eines größten Kreises mit dem Mittelpunkte der Kugel zusammenfällt. Der Theil einer Kugel, der durch eine Ebene abgeschnitten wird, heißt Segment oder Abschnitt; ein Segment und der Kegel, der auf der Basis dieses Segmentes steht, und seine Spitze im Mittelpunkte der Kugel hat, heißen zusammen kegelförmiger Sektor oder kegelförmiger Ausschnitt. Ein Theil der Kugel zwischen zwei größten Halbkreisen heißt keilförmiger Sektor. Unter Zone versteht man den Theil einer Kugel, der zwischen zwei parallelen Ebenen eingeschlossen ist. Eine Zone ist gleich der Differenz zweier Segmente.

Zusatz. Ein größter Kreis zertheilt die Kugel in zwei congruente Theile.

§. 78.

Zweiter Satz. Lehrsatz.

Vom Inhalte der Kugel und deren Theile.

Haben eine Halbkugel und ein senkrechter Cylinder eine gemeinschaftliche Basis und den Radius zur Höhe, so ist der Cylinder um einen Kegel von der nämlichen Basis und Höhe größer als die Halbkugel.

Bew. Es sey in Fig. 257 ACB eine Halbkugel, ABDE ein senkrechter Cylinder von derselben Basis und Höhe wie die Halbkugel, so ist ACDBCE der Ueberschuß des Cylinders über die Halbkugel, den wir Schale nennen wollen.

Zieht man nun DM und EM, so ist DEM ein Kegel, der gleiche Basis und Höhe mit dem Cylinder hat, und diesem Kegel ist die Schale gleich. Denn legt man durch einen beliebigen Punkt der Höhe z. B. F eine Ebene senkrecht auf dieser, so schneidet sie den Cylinder, die Halbkugel und den Kegel in Kreisen, deren Radien FG, FH und FJ sind, und es ist, wenn man HM zieht

$$FG = HM,$$
$$FJ = FM \; (\angle FMJ = 45^0);$$

ferner ist

$$MH^2 - FH^2 = FM^2, \text{ oder}$$
$$FG^2 - FH^2 = FJ^2, \text{ oder}$$
$$FG^2\pi - FH^2\pi = FJ^2\pi, \text{ d. h.}$$

die Durchschnitts-Ringfläche der Schale ist gleich der Durchschnitts-Kreisfläche des Kegels. Da dieses aber für alle Durchschnittsfiguren in gleichen Höhen gilt, und die beiden Körper gleich hoch sind, so folgt:

1) daß jedes Stück der Schale zwischen zwei parallelen auf der Höhe senkrecht stehenden Ebenen gleich ist dem abgekürzten Kegel zwischen den beiden nämlichen Ebenen;
2) daß die ganze Schale dem ganzen Kegel gleich ist.

Dritter Satz. Aufgabe.

Den Kubikinhalt einer Kugel zu finden.

Auflösung. Bezeichnet R sowohl den Radius der Kugel, als auch den Radius des die Halbkugel tangirenden Cylinders von derselben Höhe, so ist

$$\text{Cylinder} = R^2\pi$$
$$\text{Schale} = \tfrac{1}{3} R^2\pi$$
$$\text{Halbkugel} = \tfrac{2}{3} R^3\pi, \text{ daher}$$
$$K = \tfrac{4}{3} R^3\pi, \text{ oder}$$
$$K = \tfrac{1}{6} D^3\pi.$$

Zusatz. Der keilförmige Kugelsektor wird aus der Proportion gefunden:

$$S : \tfrac{4}{3} R^3\pi = n^0 : 360^0.$$

Vierter Satz. Lehrsatz.

Der Inhalt einer Zone ist gleich zweien Cylindern, von denen der eine die größere Basis, der andere die kleinere Basis der Zone zur Basis, jeder aber die halbe Höhe hat, dazu noch einer Kugel, die die Höhe zum Durchmesser hat.

Bew. Es sind in Fig. 258 AB und CD die Radien der Zonnenbasen, und DB deren Höhe. Erweitert man diese bis an den Cylinder, der die Halbkugel tangirt, und zieht FM und HM, so ist

Zone = Cylinder — Schale, oder

$$Z = BE^2\pi DB - \tfrac{1}{3}\pi DB\,(DJ^2 + BK^2 + DJ \,.\, BK)$$
$$Z = R^2\pi h - \tfrac{1}{3}\pi h\,(DJ^2 + BK^2 + DJ \,.\, BK);$$

nun ist $DJ \,.\, BK = DM \,.\, BM = (h + BM)\, BM$

$= h \,.\, BM + BM^2$, ferner ist, wenn man AM u. CM zieht $(h + BM)^2 = R^2 - b^2$

$$h^2 + 2h\, BM + BM^2 = R^2 - b^2$$
$$h^2 + 2h.BM + R^2 - B^2 = R^2 - b^2$$
$$h \,.\, BM = \frac{B^2 - b^2 - h^2}{2},$$

daher $DI \,.\, BK = R^2 - B^2 + \dfrac{B^2 - b^2 - h^2}{2}$,

ferner ist:

$$DJ^2 = R^2 - b^2$$
$$BK^2 = R^2 - B^2$$

$$DJ^2 + BK^2 + DJ.BK = 3R^2 - \frac{3}{2}B^2 - \frac{3}{2}b^2 - \frac{h^2}{2},$$

daher $Z = R^2\pi h - \frac{1}{3}\pi h\left(3R^2 - \frac{3}{2}B^2 - \frac{3}{2}b^2 - \frac{h^2}{2}\right),$

oder $Z = R^2\pi h - \frac{3}{3}R^2\pi h + \frac{3}{6}B^2\pi h + \frac{3}{6}b^2\pi + \frac{1}{6}h^3\pi,$

$$Z = \frac{1}{6}\pi h\,(3B^2 + 3b^2 + h^2).$$

Um die geometrische Bedeutung dieser Formel zu finden, schreibt man:

$$Z = B^2\pi\frac{h}{2} + b^2\pi\frac{h}{2} + \frac{1}{6}h^3\pi,$$

so drückt das erste Glied einen Cylinder aus, der die größere Basis der Zone zur Basis und die halbe Höhe der Zone zur Höhe hat, das zweite Glied sagt dasselbe in Bezug auf die kleinere Basis, das dritte Glied stellt eine Kugel vor, die h zum Durchmesser hat.

I. Zusatz. Der Kubikinhalt eines Segmentes ist gleich einem Cylinder von derselben Basis und der halben Höhe, dazu einer Kugel, die die Höhe zum Durchmesser hat.

Bew. Ein Segment ist eine Zone, in welcher der kleinere Radius gleich Null ist. Setzt man daher in obiger Formel

$b = 0$, so ist

$S = \frac{1}{6}\pi h\,(3B^2 + h^2)$, oder

$$S = B^2\pi\left(\frac{h}{2}\right) + \frac{1}{6}h^3\pi.$$

Da aber R, B und (R — h) ein rechtwinkliges Dreieck bilden, so kann man B durch R und h, oder h durch R und B ausdrücken, nämlich:

$R^2 = B^2 + (R - h)^2$, daher
$B^2 = 2Rh - h^2$, und
$h = R - \sqrt{R^2 - B^2}$, oder
$h^2 = 2R^2 - B^2 - 2R\sqrt{R^2 - B^2}$; daher
$S = \frac{1}{3}\pi h^2 (3R - h)$, oder
$S = \frac{1}{3}\pi (2R^3 - (2R^2 + B^2)\sqrt{R^2 - B^2})$.

Fünfter Satz. Aufgabe.

Den Kubikinhalt eines kegelförmigen Kugelausschnittes zu finden.

Auflösung. Dieser Sektor besteht aus einem Segmente und einem Kegel, daher ist

$$S = B^2\pi\frac{h}{2} + \frac{1}{6}h^3\pi + \frac{B^2\pi(R - h)}{3}.$$

Da man aber aus dem rechtwinkligen Dreiecke ABM entweder R oder B berechnen kann, so erhält man

$$B^2 = R^2 - (R - h)^2$$
$$B^2 = R^2 - R^2 + 2Rh - h^2$$

$B^2 = 2Rh - h^2$; setzt man dieses, so ist

$$S = (2Rh - h^2)\frac{\pi h}{2} + \frac{1}{6}h^3\pi + \frac{\pi(2Rh - h^2)(R - h)}{3},$$

$$S = R\pi h^2 - \frac{1}{3}h^3\pi + \frac{2R^2\pi h}{3} - \frac{3R\pi h^2}{3} + \frac{h^3\pi}{3}$$

$S = \frac{2}{3}R^2\pi h$, d. h. der kegelförmige Sektor ist gleich einem Cylinder, der den größten Kugelkreis zur Basis hat und dessen Höhe zwei Drittheil der Höhe des zum Sektor gehörigen Segmentes ist.

Ferner ist

$$R = \frac{B^2 + h^2}{2h}, \text{ daher auch}$$

$$S = \frac{2}{3} \pi h \frac{(B^2 + h^2)^2}{4h^2} = \frac{1}{6} \pi \frac{(B^2 + h^2)^2}{h}.$$

§. 78.

Sechster Satz. Aufgabe.

Die Oberfläche einer Kugelzone und eines Segmentes zu berechnen. Inhalt der Kugeloberfläche und deren Theile.

Auflösung. Die Oberfläche einer Kugelzone besteht nach der Entstehung der Kugel aus einer Summe von Kegelmänteln. Betrachtet man nun in Fig. 259 einen solchen Kegelmantel von sehr kleiner Höhe, erweitert aber diesen Behufs der Anschauung um gleiches auf- und abwärts, so daß AC = AD wird, so ist

$$M = AB\pi CD.$$

Zieht man die Höhe CE und den Durchmesser AF und verbindet B mit F, so ist

$$\triangle DCE \backsim \triangle AFB \text{ und}$$
$$CD : CE = AF : AB, \text{ daraus ist}$$
$$AB . CD = AF . CE$$
$$= 2Rh, \text{ daher}$$
$$M = 2R\pi h.$$

Denkt man sich nun die Höhe des Kegels wieder sehr klein, so fällt der Mantel mit einem Streifen an der Kugeloberfläche zusammen, und es bietet sich die merkwürdige Eigenschaft dar, daß alle solche Streifen gleich groß sind, wenn die senkrechten Höhen der Kegel gleich hoch sind.

Um nun die Oberfläche einer Kugelzone zu finden, denke man sich dieselbe in eine beliebige, aber sehr große Anzahl von

solchen Streifen zertheilt und ihre Höhen mit $h_1, h_2, h_3 \ldots$ bezeichnet, so ist

$$O = 2R\pi h_1 + 2R\pi h_2 + 2R\pi h_3 + 2R\pi h_4 \ldots\ldots$$
$$O = 2R\pi\,(h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 \ldots\ldots)$$
$$O = 2R\pi h,$$ d. h.

Die Oberfläche einer Zone ist gleich dem Mantel desjenigen Stückes des die Halbkugel umhüllenden Cylinders, das zwischen den Basen der Zone liegt. Dasselbe gilt für das Segment.

Anmerkung. Es ist eine überraschende Eigenschaft der Kugel, daß die Oberflächen aller Zonen von gleichen Höhen gleich sind und daß die Entfernung der Zone vom Mittelpunkte keinen Einfluß auf ihre Oberfläche hat. Was also die dem Mittelpunkte nähere Zone durch den größern Umfang an Oberfläche gewinnt, gewinnt die vom Mittelpunkt entferntere durch die Vergrößerung der Schiefe nach, indem sie mehr kugelförmig wird.

Zusatz. Die Oberfläche der Kugel zu finden.

Auflösung. Die Oberfläche der ganzen Kugel ist eine Zone, deren Höhe gleich dem Durchmesser ist, ihre Oberfläche ist daher gleich dem Mantel des ganzen umhüllenden Cylinders; nämlich

$$O = 2R\pi \,.\, D = D^2\pi,$$ oder
$$O = 2R\pi \,.\, D = 4R^2\pi;$$ d. h.

die Oberfläche der Kugel ist gleich vier größten Kreisflächen.

Zusatz. Die krumme Oberfläche eines keilförmigen Kugelsektors zu finden.

§. 79.

Siebenter Satz. Lehrsatz.

Abhängigkeit der Oberflächen und Kubikinhalte der Kugeltheile.

Der Inhalt eines kegelförmigen Kugelsektors ist gleich einem Kegel, dessen Basis der

Oberfläche des Segmentes gleich und dessen Höhe der Radius ist.

Bew. Denkt man sich die Oberfläche des Segmentes eines kegelförmigen Sektors bestehend aus lauter sehr kleinen ebenen Flächen und ihre Grenzen mit dem Mittelpunkte der Kugel verbunden, so entstehen lauter Kegel, die den Radius zur Höhe und kleine Theile von der Oberfläche zu Basen haben, die daher gleich sind einem einzigen Kegel, der dieselbe Höhe und die Summe der Basen zur Basis hat, d. h. der Sektor ist gleich einem Kegel, der die Oberfläche des Segmentes zur Basis und den Radius der Kugel zur Höhe hat.

I. Zusatz. Der Inhalt eines kegelförmigen Sektors ist:

$$S = \frac{1}{3} OR, \text{ und } O = \frac{3S}{R}.$$

II. Zusatz. Der Inhalt der Kugel ist gleich einem Kegel oder einer Pyramide, die die Oberfläche derselben zur Basis und den Radius zur Höhe hat, daher ist

$$K = \frac{1}{3} OR, \text{ und } O = \frac{3K}{R}.$$

Erklärung. Weiß man daher von einem Kugelsektor den Kubikinhalt, so findet man die Oberfläche des Segmentes, nämlich:

$$S = \frac{2}{3} R^2\pi h, \text{ daher}$$

$$O = 3 . \frac{2}{3} \frac{R^2\pi h}{R} = 2 R\pi h.$$

Weiß man aber für einen Sektor die Oberflächen des Segmentes, so findet man den Kubikinhalt, nämlich:

$O = 2\ R\pi h$, daher

$S = \frac{1}{3} . 2\ R\pi h.\ R = \frac{2}{3} R^2\pi h.$

Die Oberfläche einer Zone findet man durch die Subtraktion der Oberflächen zweier Segmente, nämlich:

$$O = 2\ R\pi h_1 - 2\ R\pi h_2 = 2\ R\pi\ (h_1 - h_2) = 2\ R\pi h.$$

Ebenso verhält es sich bei der Kugel selbst; ist nämlich

$K = \frac{4}{3} R^3 \pi$, so ist

$O = 3 . \frac{\frac{4}{3} R^3 \pi}{R} = 4 R^2 \pi$; oder

$K = \frac{1}{6} D^3 \pi$, so ist

$O = \frac{3 . \frac{1}{6} D^3 \pi}{\frac{1}{2} D} = D^2 \pi.$

Ist aber die Oberfläche bekannt, so findet man den Kubikinhalt, nämlich:

$O = 4 R^2 \pi$, daher

$K = \frac{1}{3} . 4 R^2 \pi . R = \frac{4}{3} R^3 \pi$; oder

$O = D^2 \pi$, daher

$K = \frac{1}{3} . D^2 \pi . \frac{1}{2} D = \frac{1}{6} D^3 \pi.$

Aus dem Kubikinhalte eines Kugelsektors findet man durch Subtraktion des innern Kegels den Inhalt des Segmentes, nämlich:

$S = \frac{2}{3} R^2 \pi h - \frac{1}{3} B^2 \pi (R - h)$, und

$R = \frac{B^2 + h^2}{2h}$, oder $R^2 = \frac{B^4 + 2 B^2 h^2 + h^4}{4 h^2}$, daher

$$S = \frac{2}{3} \pi h \left(\frac{B^4 + 2 B^2 h^2 + h^4}{4h^2}\right) - \frac{1}{3} B^2 \pi \left(\frac{B^2 + h^2}{2h} - h\right)$$

$$S = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{B^4 + 2 B^2 h^2 + h^4 - B^4 + B^2 h^2}{2 h}\right)$$

$$S = \frac{1}{3} \pi h^2 \left(\frac{3 B^2 + h^2}{2 h}\right)$$

$$S = \frac{1}{6} \pi h (3 B^2 + h^2).$$

Den Kubikinhalt einer Kugelzone findet man aber durch die Subtraktion zweier Segmente, nämlich:

Abhängigkeit der Oberflächen und Kubikinhalte der Kugeltheile.

$Z = \frac{1}{6} \pi h_1 (3 B^2 + h_1{}^2) - \frac{1}{6} \pi h_2 (3 b^2 + h_2{}^2)$

$= \frac{1}{6} \pi (3 B^2 h_1 - 3 b^2 h_2 + h_1{}^3 - h_2{}^3)$; nun ist

$h_1 = h + h_2$ und $h_2 = h_1 - h$, daher

$$Z = \frac{1}{6}\pi(3B^2h + 3B^2h_2 - 3b^2h_1 + 3b^2h + h_1^3 - h_2^3)$$

$$Z = \frac{1}{6}\pi(3B^2h + 3b^2h + 3B^2h_2 - 3b^2h_1 + h_1^3 - h_2^3);$$

endlich ist

$$B^2 = R^2 - (R^2 - h_1)^2 = R^2 - R^2 + 2Rh_1 - h_1^2$$

$$B^2 = 2Rh_1 - h_1^2, \text{ ebenso}$$

$$b^2 = 2Rh_2 - h_2^2, \text{ daher}$$

$$3B^2h_2 = 6R\,h_1\,h_2 - 3h_1^2\,h_2$$

$$3b^2h_1 = 6R\,h_1\,h_2 - 3h_1\,h_2^2$$

$$3B^2h_2 - 3b^2h_1 = 3h_1\,h_2^2 - 3h_1^2\,h_2, \text{ und}$$

$$Z = \frac{1}{6}\pi(3B^2h + 3b^2h + h_1^3 - 3h_1^2h_2 + 3h_1h_2^2 - h_2^3)$$

$$Z = \frac{1}{6}\pi[3B^2h + 3b^2h + (h_1 - h_2)^3]$$

$$Z = \frac{1}{6}\pi(3B^2h + 3b^2h + h^3),$$

$$Z = \frac{1}{6}\pi h(3B^2 + 3b^2 + h^2).$$

§. 80.

Vom sphärischen Dreiecke.

Erklärung. Schneiden sich drei größte halbe Peripherien auf der Oberfläche ihrer Kugel, so heißt der Theil der Kugeloberfläche, der zwischen den drei Durchschnittspunkten liegt, sphärisches Dreieck; der Theil der Kugel aber, der zwischen den Ebenen selbst liegt, also das sphärische Dreieck zur Basis und den Mittelpunkt der Kugel zur Spitze hat, heißt ein dreiseitiger Sektor. An der Spitze dieses Sektors entsteht ein körperliches Dreieck, dessen Seiten einzeln den Bögen des sphärischen Dreieckes, die hier auch die Seiten genannt werden, gleich sind; was daher von den drei Seiten eines körperlichen Dreieckes gesagt wurde, gilt auch wörtlich für die drei Seiten des sphärischen Dreieckes. Die Winkel, welche die Ebenen der Bögen eines sphärischen Dreieckes bilden, heißen auch die Winkel des sphärischen Dreieckes. Man findet daher den Winkel zweier Bögen, indem man an diese durch ihren Durchschnitt Tangenten errichtet.

Da demnach die Winkel eines sphärischen Dreieckes einer-

lei sind mit den Winkeln des körperlichen Dreieckes, so gilt alles, was von diesen gesagt wurde, auch für jene; und alles, was beim körperlichen Dreiecke in Bezug auf Seiten und Winkel zugleich gefunden wurde, läßt sich wörtlich auf das sphärische Dreieck übertragen.

Verlängert man die Kanten des dreiseitigen Sektors rückwärts bis an die Kugeloberfläche, so entsteht das symmetrische Dreieck.

Denkt man sich ein zweites sphärisches Dreieck, dessen Seiten einzeln die Winkel des gegebenen zu zwei Rechten ergänzen und umgekehrt, so entspricht dieses sphärische Dreieck dem Supplementar-Dreieck.

Da die Grenzen der drei Seiten eines körperlichen Dreieckes 0 und 4R sind, so sind die Grenzen der drei Winkel des Supplementar-Dreieckes 6R und 2R, und dieses gilt für jedes köperliche und jedes sphärische Dreieck. Die drei Winkel eines sphärischen Dreieckes sind daher größer als 2R. Der Winkel, welcher angibt, um wie viel die drei Winkel eines sphärischen Dreieckes größer sind als zwei Rechten, heißt der sphärische Ueberschuß, das Verhältniß des Ueberschusses zu zwei Rechten oder 180° heißt der sphärische Exceß.

Achter Satz. Aufgabe.

Den Inhalt eines sphärischen Dreieckes zu finden.

Auflösung. Denkt man sich in Fig. 260. zuerst Bogen BC bis G und E, und ebenso Bog. AC bis D und F erweitert, so sind die beiden Theile der Kugeloberfläche DEC und GFC gleich der Oberfläche eines keilförmigen Sektors, dessen Winkel C ist. Erweitert man ebenso Bogen AB bis H und J, so erhält man noch zwei solche keilförmige Sektoren,

deren Winkel A und B sind. Die Oberflächen dieser Sektoren zusammen enthalten das Dreieck ABC dreimal und ausserdem den übrigen Theil der Oberfläche der Halbkugel, daher ist

$$2R^2\pi = 4R^2\pi\frac{A}{360} + 4R^2\pi\frac{B}{360} + 4R^2\pi\frac{C}{360} - 2\triangle ABC,$$

$$2\triangle ABC = 2R^2\pi\left(\frac{A + B + C - 180}{180}\right)$$

$$\triangle ABC = R^2\pi\left(\frac{180 + u - 180}{180}\right)$$

$$\triangle ABC = R^2\pi\frac{u}{180},$$

$$\triangle ABC = R^2\pi E;$$ d. h.

Der Inhalt eines sphärischen Dreieckes ist gleich dem größten Kreise multiplizirt mit dem sphärischen Exceß.

Zusatz. Den Inhalt eines dreiseitigen Sektors zu finden.

Auflösung. Es ist

$$S = \frac{R^2\pi E \,.\, R}{3} = \frac{1}{3} R^3\pi\; E.$$

§. 81.

Erklärung. Denkt man sich einen Körper mit parallelen Ebenen in sehr kleinen Entfernungen durchschnitten, so sind die Theile des Körpers sehr nahezu Prismen und man kann sich daher immer eine Prismen-Summe denken, die dem gegebenen Körper an Inhalt beliebig nahe gleich ist, d. h. jeder Körper läßt sich als ein Aggregat von Prismen betrachten. Dieser Satz erhält strenge Wahrheit, wenn die Höhe der einzelnen Prismen unendlich klein, d. h. Null ist und er heißt alsdann: Der Inhalt eines Körpers ist gleich einem Aggregate von unendlich vielen Flächen. Vom Inhalte der von krummen Flächen begrenzten Körper.

Kennt man die einzelnen Flächen oder nur eine derselben

und dazu das Gesetz ihrer Abnahme oder Zunahme und kennt dazu eine Linie, die die Anzahl der Flächen ausdrückt, so kann man ihre Summe herstellen und man erhält so den Inhalt des Körpers. Beispiele hiezu bieten die Prismen und Pyramiden.

Neunter Satz. Lehrsatz.

Der Inhalt eines Körpers ist gleich dem Inhalte einer Fläche, deren Ordinaten für eine beliebige Maßeinheit den parallelen Durchschnittsflächen des Körpers gleich sind, d. h. die nämlichen Zahlen geben.

Bew. Der Inhalt des Körpers ist gleich der Summe aller Durchschnittsflächen, der Inhalt der Fläche gleich der Summe aller Ordinaten; da aber die Ordinaten dieselben Zahlen sind, wie die Durchschnittsfiguren des Körpers, so ist auch ihre Summe dieselbe, d. h. der Inhalt eines Körpers ist gleich dem Inhalte der Fläche, deren Ordinaten dieselben Zahlen sind, welche die Durchschnittsfiguren des Körpers vorstellen.

Zusatz. Den Inhalt eines beliebigen Körpers näherungsweise anzugeben.

Auflösung. Bedeuten $f_1, f_2, f_3, f_4 \ldots$ die Durchschnittsflächen und a ihre Entfernung, so ist vermöge obigen Lehrsatzes und des §. 54.

$$K = \tfrac{1}{3} a (f_1 + 4f_2 + 2f_3 + 4f_4 + 2f_5 + 4f_6 + f_7).$$

Für Umdrehungsflächen ist:

$$K = \tfrac{1}{3} a\pi (R_1^2 + 4R_2^2 + 2R_3^2 + 4R_4^2 + 2R_5^2 + 4R_6^2 + R_7^2).$$

I. Erklärung. Welche Genauigkeit diese Formel gibt, kann man an einem Beispiele sehen, wenn man sie auf ein Kugelsegment anwendet. Der Radius der Basis des Seg-

mentes sey B und seine Höhe h; theilt man nun h in zwei gleiche Theile und sucht den mittlern Kreis, dessen Radius m ist, so ist:

$$m^2 = R - (R - \frac{1}{2} h)^2 = Rh - \frac{1}{4} h^2, \text{ oder}$$

$$\text{da } Rh = \frac{B^2 + h^2}{2}$$

$$m^2 = \frac{2B^2 + h^2}{4}, \text{ daher}$$

$$S = \frac{1}{3} a(f_1 + 4f_2 + f_3),$$

$$S = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} h\pi (0 + 4Rh - h^2 + B^2),$$

$$S = \frac{1}{6} \pi h (4Rh - h^2 + 2Rh - h^2),$$

$$S = \frac{1}{6} \pi h (6Rh - 2h^2),$$

$$S = \frac{1}{3} \pi h^2 (3R - h); \text{ oder}$$

$$S = \frac{1}{6} \pi h (0 + 2B^2 + h^2 + B^2)$$

$$S = \frac{1}{6} \pi h (3B^2 + h^2);$$

also gibt obige Formel geometrische Genauigkeit.

II. Erklärung. Dreht sich eine Ellipse um eine ihrer Axen, so daß die einzelnen Punkte Kreise beschreiben, so nennt man den dadurch entstandenen Körper ein Ellipsoid mit zwei Axen; beschreiben aber die einzelnen Punkte wieder Ellipsen, so entsteht das Ellipsoid mit drei Axen.

Dreht sich ein Segment einer Parabel um seine Ordinate, so heißt der entstandene Körper eine parabolische Spindel; dabei können die einzelnen Punkte Kreise, Ellipsen, Parabeln und jede andere Kurve beschreiben; dreht sich dieses Segment um die Axe, so heißt der entstandene Körper Paraboloid.

Zehnter Satz. Lehrsatz.

Den Inhalt eines Segmentes eines Ellipsoids mit drei Axen anzugeben.

Auflösung. Es seyen die Axen des Ellipsoids A, B, C,

die Axen des Segmentes a, b, c und diese gehen den erstern parallel. Man theile nun a in zwei gleiche Theile und bezeichne die Axen der Durchschnittsfigur mit m und n, so ist:

$$S = \frac{1}{3} a (f_1 + 4 f_2 + f_3), \text{ oder}$$
$$S = \frac{1}{3} . \frac{1}{2} a (o + 4 mn\pi + bc\pi)$$
$$S = \frac{1}{6} a\pi (4 mn + bc), \text{ nun ist aber}$$

$$\frac{m^2}{B^2} + \frac{(A - \frac{1}{2} a)^2}{A^2} = 1, \text{ und}$$

$$\frac{n^2}{C^2} + \frac{(A - \frac{1}{2} a)^2}{A^2} = 1, \text{ daraus}$$

$$m . n = \frac{BC}{A^2} (Aa - \tfrac{1}{4} a^2), \text{ daher}$$

$$S = \frac{1}{6} a\pi \left(\frac{BC}{A^2} (4 Aa - a^2) + bc\right).$$

I. Zusatz. Den Inhalt des Ellipsoids selbst zu finden. Setzt man a = A, b = B, c = C, so geht das Segment in das halbe Ellipsoid über und es ist

$$E = 2 . \frac{1}{6} A\pi \left(\frac{BC}{A^2} (4 A^2 - A^2) + BC\right)$$
$$E = 2 . \frac{1}{6} A\pi (4 BC)$$
$$E = \frac{4}{3} ABC\pi.$$

II. Zusatz. Den Inhalt des Ellipsoids mit zwei Axen zu finden.

Auflösung. Sind die Axen der Ellipse A und B, und wird sie um A gedreht, so ist B = C, daher:

$$E = \frac{4}{3} AB^2\pi.$$

Eilfter Satz. Aufgabe.

Den Inhalt einer parabolischen Spindel zu finden.

Auflösung. Halbirt man die Ordinante und errichtet m senkrecht auf y, so ist in Fig. 261:

$S = 2 \cdot \frac{1}{3} a\pi (R_1^2 + 4R_2^2 + R_3^2)$,

$S = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} y\pi (o + 4m^2 + x^2)$;

es ist aber:

$y^2 = qx$, daher $x = \frac{y^2}{q}$, $x_1 = \frac{y^2}{4q}$ und $m = \frac{3y^2}{4q}$, folglich

$S = \frac{2}{6} y\pi \left(4 \cdot \frac{9y^4}{16q^2} + \frac{y^4}{q^2}\right)$,

$S = \frac{13}{12} \frac{y^5\pi}{q^2} = \frac{13}{12} x^2 y\pi$.

Zwölfter Satz. Aufgabe.

Den Inhalt eines Paraboloids anzugeben.

Auflösung. Halbirt man x und errichtet die Ordinate m, so ist:

$P = \frac{1}{3} a\pi (R_1^2 + 4R_2^2 + R_3^2)$,

$P = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} x\pi (o + 4m^2 + y^2)$; $m^2 = \frac{1}{2} qx$, folglich

$P = \frac{1}{6} \pi x (2qx + y^2)$,

$P = \frac{1}{6} \pi x \, 3\, qx$,

$P = \frac{1}{2} \pi x^2 q$;

$P = \frac{1}{2} \pi xy$.

Anmerkung. Diese Beispiele werden genügen, den Nutzen obiger Näherungsformel einzusehen. Daß diese Formeln geometrische Genauigkeit enthalten, davon kann man sich dadurch überzeugen, daß für mehrere Durchschnittsflächen dieselben Resultate erscheinen, wenn nur die Anzahl der Theile der Axe eine Gerade ist, denn unter dieser Bedingung ist die Formel gefunden. Ganz besondere Anwendung findet diese Formel bei Berechnung des Inhaltes eines Schiffes, vorzüglich des innern Raumes. Die Durchschnittsfiguren werden ebenfalls durch die Näherungsformel gefunden, indem die Ordinaten leicht meßbar sind. —

Erklärung. Im gemeinen Leben findet man den Kubikinhalt eines Körpers sehr oft durch das Gewicht desselben.

Es sey nämlich das spezifische Gewicht eines Körpers e, das Gewicht der kubischen Einheit des Wassers sey p, das Gewicht des Körpers selbst P, so ist das Gewicht der kubischen Einheit des Körpers pe, daher der Kubikinhalt oder

$$K = \frac{P}{pe}.$$

Der bayerische Kubikfuß Wasser wiegt 44, 39; der französische Kubikfuß aber 70 bayerische Pfund.

Eine zweite praktische Methode, den Kubikinhalt eines Körpers zu finden, ist das Eintauchen desselben in Wasser, indem man den Kubikinhalt des verdrängten oder in einem Gefässe aufsteigenden Wassers berechnet, der dem Kubikinhalte des Körpers gleich ist.

Berichtigungen.

Seite 20 Zeile 5 von oben lies DBE ſtatt DBC.

„ 27 iſt durchaus $<$ ſtatt $\angle$ zu ſetzeu.

„ 30 Zeile 20 von oben lies $\angle$ B $+$ ſtatt $\angle + $ B.

„ 32 Zeile 1 von unten lies auf B ſtatt auf A.

„ 36 Zeile von unten iſt Winkel einzuſchalten.

„ 49 iſt einzuſchalten:

III. Zuſatz. Jedes Winkelgeſetz, das für eine Durchſchnittslinie gilt, gilt auch für jede andere.

„ 75 Zeile 9 von oben lies cd ſtatt ed.

„ 77 Zeile 13 von oben lies z ſtatt x.

„ 80 Zeile 3 von unten lies EL ſtatt FL.

„ 80 Zeile 1 von unten lies AD # MO ſtatt MO.

„ 85 Zeile 8 von unten lies HG ſtatt HF, und Zeile 1, 2, 3 von unten iſt $\angle$ ſtatt $<$ zu ſetzen.

„ 107 Zeile 1 von unten lies $\sqrt{BC \cdot BD}$ ſtatt $\sqrt{BC : BD}$.

„ 141 Zeile 1 von unten lies daher R ſtatt daher P.

„ 143 Zeile 8 von oben lies 2985984 ſtatt 2985985.

„ 150 iſt der Beweis vom II. Zuſatz ſo zu corrigiren:

Da AB $=$ AM $=$ BM iſt, ſo iſt

$\angle A = \angle B = \angle M$, daher

$\angle M = \frac{2}{3}$ R.

„ 161 Zeile 11 lies $2R\pi$ ſtatt 2π.


„ 184 Zeile 13 von oben lies fußt ſtatt faßt.

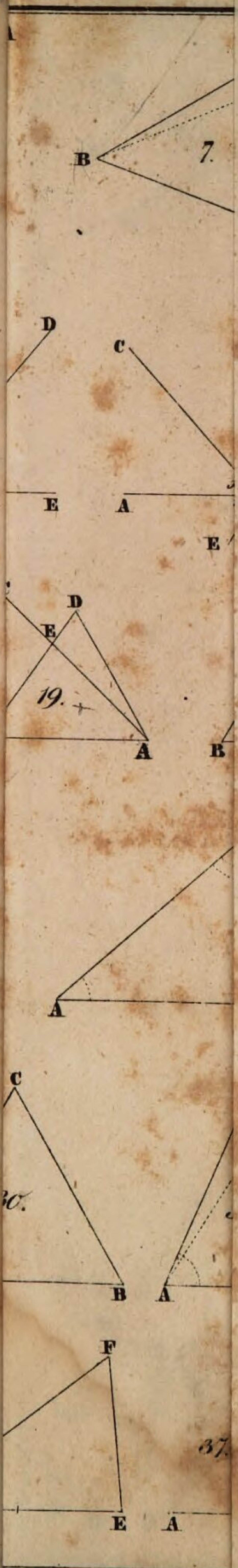
„ 184 Zeile 14 von oben lies um ſtatt nur.


„ 187 Zeile 2 und 3 von unten lies BDF ſtatt ADF.


„ 190 Zeile 15 und 16 lies A'D und A'E ſtatt AD und AE.

„ 217 Zeile 2 von unten lies AE ſtatt AC.

B
7.
D
C
E
A
E
D
E
19.
A
B
A
C
30.
B
A
F
37.
E
A

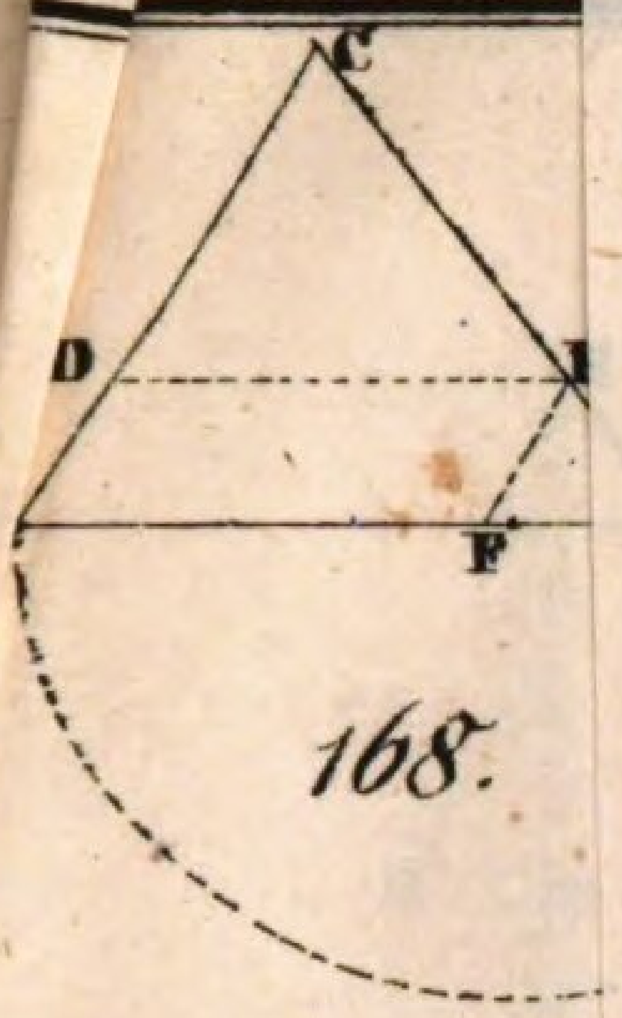

B
7.
D
C
E
A
E
D
E
19.
A
B
A
C
30.
B
A
F
37.
E
A


64.


89^b
M
A
A
E
E
G
B
94.
B
E
H
C
F
G
107^a
C
b
a
B
b
C
a
A
C
111.
D
A
F
C
C
D
121.
A




D G
I
B A
C C
D B A
142. 14
E A
C
152.
F
G
K
H H

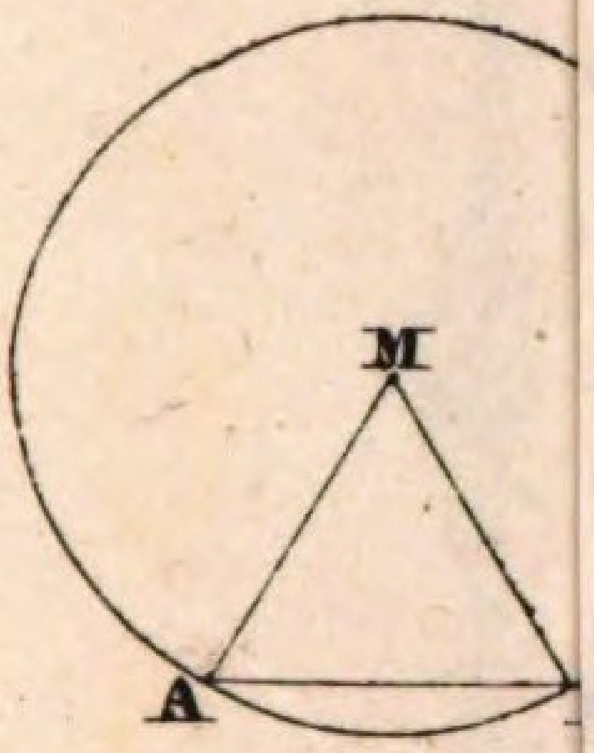


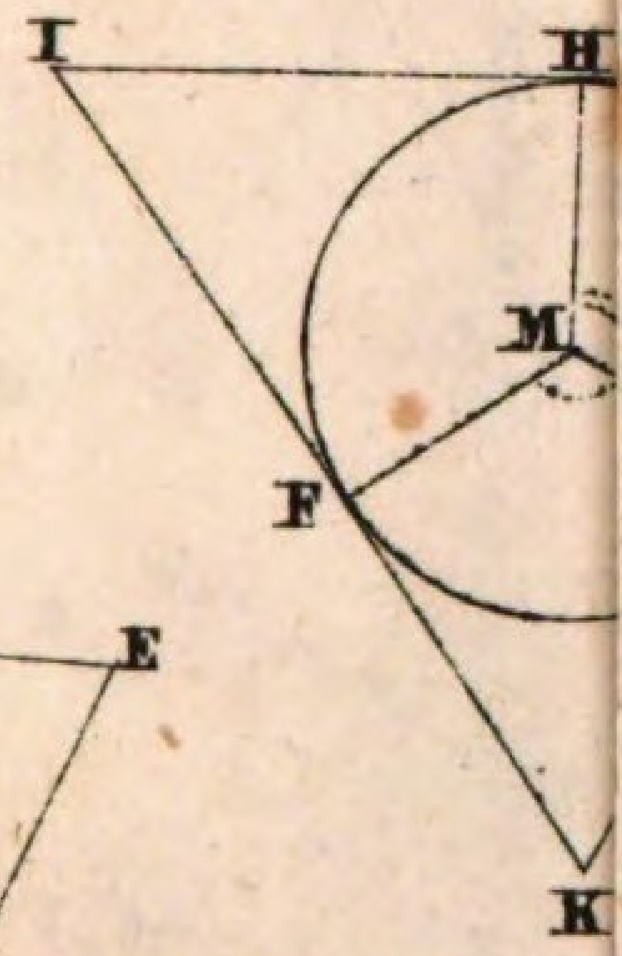
168.

172



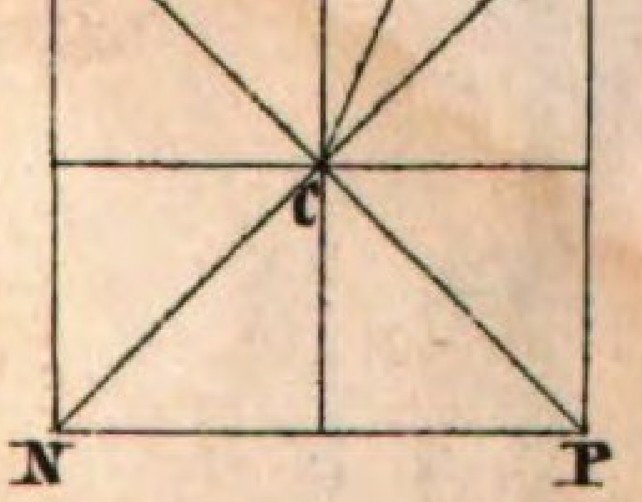
76.






185.




A
B
C
F
D
E
N
C
D
E
M
N
F
A
202.
M
211.
B
C
C
B
D
B

